详细解答

STEP I 2000，第 12 题

概率与统计 • 几何分布

STEP I 2000，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s1-q12

关键思路

每一种情况都先问：已知之前每一次尝试都失败，下一次成功的机会是多少？然后把首 $n-1$ 次尝试失败的概率（probability）与第 n 次成功的概率相乘。三种规则得出的答案形态截然不同：一种是条件概率（conditional probability）不断增大，一种是由一开始就保持不变，还有一种是第一次之后才保持不变。

全篇以 N 表示所需的尝试次数，因此我们要求的是 $\mathrm{P}(N=n)$，其中 $n=1,2,3,\ldots$。我们把能开门的那条钥匙称为正确钥匙。

解答

第 (i) 部分

这里我绝不重复使用任何钥匙，所以我是按一个均匀随机的次序逐一试钥匙。根据对称性（symmetry），正确钥匙落在这个次序中 k 个位置的任何一个，可能性都相同。因此

$$\mathrm{P}(N=n)=\frac{1}{k}\quad \text{其中} n=1,2,\ldots,k, \qquad \mathrm{P}(N=n)=0 \text{ 当} n>k.$$

如果觉得这个对称性论证来得太取巧，可以改为把条件概率相乘。失败 j 次之后，还有 $k-j$ 条未试过的钥匙，其中一条是正确的，所以对于 $1\le n\le k$

$$\mathrm{P}(N=n)=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k-2}{k-1}\cdots\frac{k-n+1}{k-n+2}\cdot\frac{1}{k-n+1}=\frac{1}{k},$$

因为这个乘积会逐项相消（telescope）。

第 (ii) 部分

现在每一次尝试都是从全部 k 条钥匙中重新、独立（independent）地选取，所以不论之前发生过甚么，每一次尝试成功的概率都是 $\frac{1}{k}$。要刚好尝试 n 次，首 $n-1$ 次必须失败，而第 n 次必须成功：

$$\mathrm{P}(N=n)=\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}\frac{1}{k},\qquad n=1,2,3,\ldots$$

这是参数为 $\frac{1}{k}$ 的几何分布（geometric distribution），而 n 并没有上限。

第 (iii) 部分

第一次尝试成功的概率是 $\frac{1}{k}$，所以 $\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{k}$。

现在假设第 m 次尝试（对某个 $m\geq 1$）失败了。那么第 m 次所试的是一条错的钥匙。在第 $m+1$ 次尝试，我从其余 $k-1$ 条钥匙中均匀地选取。

> **想一想** 第 m 次尝试之前的经过，会否影响第 $m+1$ 次尝试成功的机会？

不会。唯一有关系的是哪一条钥匙被排除，而被排除的永远是一条错的钥匙。所以可供选择的 $k-1$ 条钥匙永远包括正确的那一条，而不论之前发生过甚么，第 $m+1$ 次尝试成功的概率都是 $\frac{1}{k-1}$，失败的概率都是 $\frac{k-2}{k-1}$。

所以对于 $n\geq 2$：第一次尝试失败（概率为 $\frac{k-1}{k}$），第 $2,\ldots,n-1$ 次尝试失败（每次概率为 $\frac{k-2}{k-1}$），而第 n 次尝试成功（概率为 $\frac{1}{k-1}$）。因此

$$\mathrm{P}(N=n)=\frac{k-1}{k}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^{n-2}\frac{1}{k-1}=\frac{1}{k}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^{n-2},\qquad n\geq 2,$$

另外还有 $\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{k}$。

有趣的是，同样有 $\mathrm{P}(N=2)=\frac{1}{k}$，与第 (i) 部分的结果一样。（当 $k=2$ 时，这个规则迫使我轮流使用两条钥匙，所以 N 是 1 或 2，概率各为 $\frac{1}{2}$；只要把 0^0 理解为 1，公式便给出这个结果。）

验算

- 每个分布的总和都是 1。在 (iii) 中，$\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\sum_{j\geq 0}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^j=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}(k-1)=1$。
- 各个平均值（mean）都合乎情理：(i) 是 $\frac{k+1}{2}$，(ii) 是 k，(iii) 是 $1+\frac{(k-1)^2}{k}$。与 (ii) 相比，不重复使用上一条钥匙略有帮助，但远远不及完全不重复使用任何钥匙。
- 我们对 $k=2,\ldots,5$ 和 $n\leq 7$，以分数列举每一个选择序列，精确地核对了全部三条公

式。就 $k = 5$ 的 (iii) 进行 2×10^5 次模拟 (simulation) 试验，得出 $\mathrm{P}(N = 3) \approx 0.1496$，而精确值是 $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0.15$。

常见错误

- 在 (iii) 中，第一次尝试也用了 $\frac{k-2}{k-1}$。第一次是从全部 k 条钥匙中选取，所以第一个因子是 $\frac{k-1}{k}$。
- 在 (i) 中，忘记说明当 $n > k$ 时 $\mathrm{P}(N = n) = 0$。
- 在 (iii) 中，以为被排除的钥匙可能是正确的那一条。其实被排除的永远只是刚刚试过而失败的钥匙。

STEP 之外

第 (iii) 部分是一条小型的马可夫链（*Markov chain*）。接下来发生甚么只取决于当前的状态（state）（这里是指上一次试的是哪一条钥匙），而与整段历史无关。找出一个令过去变得无关重要的状态，正是马可夫链理论的核心技巧，它把繁复的条件概率化为简单的乘积。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入门教材）正是以这个程度介绍马可夫链。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。