详细解答

STEP I 2000，第 11 题

力学 · 梯子的摩擦力平衡

STEP I 2000，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s1-q11

关键思路

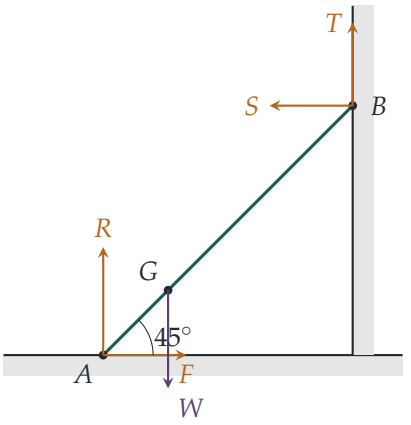
这是一道两端都有摩擦力的梯子问题。“在 A 和 B 两处同时达到极限”这个条件，令每个摩擦力（frictional force）都可以用对应的法向反作用力（normal reaction）表示，于是两条分解力的方程便决定了全部四个接触力。这样一来，力矩（moment）方程就成了多出来的一个条件：它要么碰巧成立，要么不成立。在第一部分，我们证明它不成立。在第二部分，我们把额外质量的位置当作未知数，令它成立。

解答

模型与方程

我们把杆看成一根刚性杆（rigid rod），其重量 $W = 5g\,\mathrm{N}$ 作用于 G。A（地面）和 B（墙壁）两处的接触面都是粗糙的。各个力如下：

- 在 A：法向反作用力 R 向上，摩擦力 F 沿水平方向；
- 在 B：法向反作用力 S 沿水平方向离开墙壁，摩擦力 T 沿铅垂方向（取向上为正，所以 $T < 0$ 即表示向下）；
- 重量 W 在 G 处向下。



水平方向的力只有 F 和 S，而 $S \geq 0$ 把杆推离墙壁。所以 F 必须指向墙壁，并且

$$F = S. \tag{1}$$

沿铅垂方向分解，

$$R + T = W. \tag{2}$$

对 A 取力矩时，设 $AB = 0.81$，$c = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$。那么 B 与 A 的水平距离是 $0.81c$，高度也是 $0.81c$，而 G 与 A 的水平距离是 $0.21c$。比较顺时针和逆时针方向的力矩，

$$S\,(0.81c) + T\,(0.81c) = W\,(0.21c),$$

约去 c 后得

$$0.81\,(S + T) = 0.21\,W. \tag{3}$$

45° 的好处就在这里：因子 c 可以从每一项中约去。

摩擦力不可能在两端同时达到极限

假设摩擦力在两端都达到极限。那么 $F = 0.2R$，而 $|T| = 1.0\,S = S$。

> ? **想一想** 当 B 处的摩擦力达到极限时，它指向哪个方向?

最自然的情况是杆即将滑动，A 远离墙壁而 B 向下滑，这时 $T = +S$。为求周全，我们把两种符号都检查一遍。

情况 $T = S$。由 (1)，$S = F = 0.2R$，而 (2) 给出 $R + 0.2R = W$。所以 $R = \frac{5}{6}W$，$S = T = \frac{1}{6}W$。于是 (3) 的左方是

$$0.81\left(\tfrac{1}{6}W + \tfrac{1}{6}W\right) = 0.27\,W \neq 0.21\,W.$$

所以力矩方程不成立。

情况 $T = -S$。(3) 的左方是 0，但右方是 $0.21W > 0$，这是不可能的。

在两种情况下，杆都不可能处于平衡（equilibrium）。所以摩擦力不可能在 A 和 B 两处同时达到极限，这正是所要证明的。

（在非极限的情况下，平衡当然是可能的：例如 $T = S = \frac{7}{54}W$ 满足 (3)，并给出 $R = \frac{47}{54}W$，而且 $F = S \leq 0.2R$。）

在 P 加上质量

设 $AP = x\,\mathrm{m}$。额外的重量同样是 $W = 5g\,\mathrm{N}$，作用于 P，所以总重量是 $2W$。方程 (1) 和 (2) 变成

$$F = S, \qquad R + T = 2W,$$

而对 A 的力矩方程多了一项 $W\,(xc)$。约去 c 后，它变成

$$0.81\,(S + T) = 0.21\,W + x\,W. \tag{4}$$

现在摩擦力在两端都达到极限。$T = -S$ 的情况同样不可能，因为这时 (4) 的左方是 0，右方却是正数。所以 $T = S$ 且 $F = 0.2R$，因此

$$S = 0.2R, \qquad R + 0.2R = 2W \quad \Longrightarrow \quad R = \tfrac{5}{3}W, \quad S = T = \tfrac{1}{3}W.$$

代入 (4) 得

$$0.81 \times \tfrac{2}{3}\,W = 0.54\,W = 0.21\,W + x\,W,$$

所以 $x = 0.33$。因此

$$AP = 0.33\ \mathrm{m}.$$

这个值介乎 0 与 0.81 之间，所以 P 在杆上。它在 G 之外（也在中点之外），所以额外的质量把合重心（centre of gravity）沿杆向上推，而这往往会令梯子滑倒。

验算

- 质量放在 P 时，以 W 为单位，各力为 $R = \frac{5}{3}$ 和 $F = S = T = \frac{1}{3}$。于是 $F/R = 0.2$，$T/S = 1$，所以两处都达到极限。铅垂方向有 $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$，而力矩给出 $0.81 \times \frac{2}{3} = 0.54 = 0.21 + 0.33$。
- 合重心与 A 的距离是 $\frac{1}{2}(0.21 + 0.33) = 0.27\,\mathrm{m}$。这正是第一部分中，要令摩擦力在两端同时达到极限所需的位置（$0.27W$ 对比 $0.21W$）。这是合理的，因为摩擦系数不变，只是总重量增加了一倍。
- 质量和 g 在整个计算中都会约去，所以答案与它们无关。以 $g = 9.8$ 和真正的 45° 力矩作数值代入，所得残差的数量级为 10^{-15}。

常见错误

- 把 A 处摩擦力的方向取错。由于 S 是另外唯一的水平力，F 必须指向墙壁。
- 忘记 B 处的摩擦力是沿铅垂方向的，所以它会出现在铅垂方向的分解式中，令 R 小于总重量。
- 用了杆的中点而不是 G。这根杆并不均匀。

STEP 之外

平面上的刚体（rigid body）给出三条平衡方程，所以一道有四个未知接触力的问题是静不定（statically indeterminate）的。单靠刚体静力学，无法得知摩擦力怎样在两端之间分配。加上“在两端同时达到极限”这个条件，就多了两条方程，令方程组变成超定（over-determined），而这正是第一部分无解的原因。在工程学上，静不定的问题是通过为接触点的弹性建立模型来解决的。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）以大学一年级的程度，仔细讨论了刚体静力学和摩擦力。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。