详细解答

STEP I 2000，第 10 题

力学 · 碰撞与恢复系数

STEP I 2000，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s1-q10

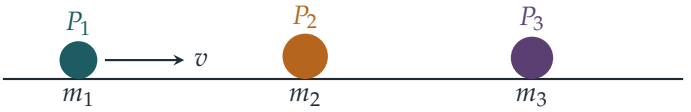
关键思路

每次碰撞都给我们两条方程：动量守恒（conservation of momentum）和牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）。这里碰撞的结果已部分知道（P_1 停下；P_3 以速率 v 离开），所以我们不是求各个速度，而是求未知的系数。可行条件则来自任何恢复系数（coefficient of restitution）都必须符合的唯一物理限制 $0 \le e \le 1$，而最终能量成为唯一可自由变动的质量 m_2 的函数，我们在这些条件所容许的区间上求它的最大值和最小值。

解答

模型

我们把三个物体视为在光滑桌面上沿同一直线运动的质点（particle），因此没有水平外力作用，每次碰撞中动量都守恒。取 P_1 初始运动的方向为正方向。



第一次碰撞

设 P_2 以速度 u 离开。由于 P_1 变为静止，

$$\text{动量：}\quad m_1 v = m_2 u \quad\Longrightarrow\quad u = \frac{m_1 v}{m_2},$$

$$\text{恢复定律：}\quad u - 0 = e(v - 0) \quad\Longrightarrow\quad e = \frac{u}{v} = \frac{m_1}{m_2}.$$

第二次碰撞

P_2 现在以速率 u 撞向静止的 P_3。设 P_2 碰撞后的速度为 w；题目告诉我们 P_3 的速度为 v。由动量守恒得

$$m_2u = m_2w + m_3v \quad\Longrightarrow\quad m_1v = m_2w + m_3v \quad\Longrightarrow\quad w = \frac{(m_1 - m_3)v}{m_2},$$

其中用到第一次碰撞所得的 $m_2u = m_1v$。由恢复定律（分离速率 $= e' \times$ 接近速率）得

$$v - w = e'u.$$

代入 w 和 u，并将全式乘以 m_2/v（它不等于零）：

$$m_2 - (m_1 - m_3) = e'm_1 \quad\Longrightarrow\quad e' = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_1},$$

这就是所要求的结果。

这样的碰撞何时可能发生？

任何恢复系数都介乎 0 与 1 之间。应用 $0 \le e' \le 1$，并乘以 $m_1 > 0$：

$$0 \le m_2 + m_3 - m_1 \le m_1 \quad\Longleftrightarrow\quad m_1 \le m_2 + m_3 \le 2m_1,$$

这正是题目要求的不等式。所以它是这些碰撞可能发生的必要条件。

> **想一想** 我们是否已用上每一个限制条件？e 又如何？

我们还需要 $0 \le e \le 1$。由于 $e = m_1/m_2$，这个条件成立当且仅当 $m_2 \ge m_1$。这个条件并不属于题目要求我们证明的结果（事实上，有了它，左边的不等式 $m_2 + m_3 \ge m_1$ 便自动成立），但它在最后一部分十分重要。综合以上各点，这些碰撞可能发生当且仅当

$$m_1 \le m_2 \le 2m_1 - m_3.$$

要这个区间非空，我们需要 $m_3 \le m_1$。这时 $w = (m_1 - m_3)v/m_2 \ge 0$，所以第二次碰撞后 P_2 继续向前运动（或停下），永远不会回头撞上静止的 P_1。同时 $v - w = e'u \ge 0$，所以 P_2 不会再追上 P_3。因此总共只有这两次碰撞。

最终能量

最后 P_1 静止，P_2 的速度为 w，P_3 的速度为 v，所以最终动能（kinetic energy）为

$$E = \tfrac{1}{2}m_2w^2 + \tfrac{1}{2}m_3v^2 = \frac{(m_1 - m_3)^2v^2}{2m_2} + \tfrac{1}{2}m_3v^2.$$

当 m_1、m_3 和 v 固定时，只有 m_2 可以变动，范围是 $m_1 \le m_2 \le 2m_1 - m_3$。第一项是一个非负常数除以 m_2，所以 E 是 m_2 的递减函数（若 $m_1 = m_3$ 则为常数，不过这时区间本来就只有 $m_2 = m_1$ 这一点）。

最大能量在 $m_2 = m_1$ 时出现（第一次碰撞为完全弹性（perfectly elastic），$e = 1$）：

$$E_{\max} = \frac{(m_1 - m_3)^2 v^2}{2m_1} + \frac{m_3 v^2}{2} = \frac{(m_1^2 - m_1 m_3 + m_3^2)\, v^2}{2m_1}.$$

最小能量在 $m_2 = 2m_1 - m_3$ 时出现（第二次碰撞为完全弹性，$e' = 1$）：

$$E_{\min} = \frac{(m_1 - m_3)^2 v^2}{2(2m_1 - m_3)} + \frac{m_3 v^2}{2} = \frac{(m_1^2 - 2m_1 m_3 + m_3^2 + 2m_1 m_3 - m_3^2) v^2}{2(2m_1 - m_3)} = \frac{m_1^2 v^2}{2(2m_1 - m_3)}.$$

验算

- 碰撞中能量永远不会增加，所以我们需要 $E_{\max} \le \frac{1}{2} m_1 v^2$。这即是 $m_1^2 - m_1 m_3 + m_3^2 \le m_1^2$，亦即 $m_3(m_3 - m_1) \le 0$，由于 $m_3 \le m_1$，此式成立。
- 可以验证 $E_{\max} - E_{\min} = \dfrac{(m_1 - m_3)^3 v^2}{2m_1(2m_1 - m_3)} \ge 0$，而且当 $m_1 = m_3$ 时两个答案都等于 $\frac{1}{2} m_1 v^2$（这时 $m_2 = m_1$，两次碰撞都是弹性碰撞，没有能量损失）。
- 数值验算：取 $m_1 = 2$、$m_3 = 1$、$v = 1$，初始能量为 1，$E_{\max} = \frac{3}{4}$，$E_{\min} = \frac{2}{3}$。以精确算术让 m_2 逐步走遍 $[2, 3]$，可重现这两个极值，并确认 $e, e' \in [0, 1]$ 在整个区间内成立，在区间外则不成立。

常见错误

- 在 $m_1 - m_3 \le m_2 \le 2m_1 - m_3$ 上求最大值和最小值（只考虑 e'）。这样会得出“最大值” $\frac{1}{2} m_1 v^2$，即全部初始能量，但对应的 m_2 值使 $e = m_1 / m_2 > 1$，这是不可能的。
- 把恢复定律弄反了：是分离速率等于 e 乘以接近速率。

STEP 之外

这里的模式是：每个限制条件为参数划出一个容许的区间，然后我们在该区间上求一个单调函数的最大值和最小值。这是约束优化（constrained optimisation）最简单的情形，由此可发展出线性规划（linear programming）和拉格朗日乘数（Lagrange multipliers）。在物理方面，碰撞在质心参考系（centre-of-mass frame）中简洁得多：在那里，恢复系数只是把每个速度乘以 $-e$，而损失的能量为 $\frac{1}{2}\mu(1 - e^2) \times$（相对速率）^{2}，其中 μ 为约化质量（reduced mass）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这个观点阐述碰撞。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。