详细解答

# STEP I 2000，第 1 题

纯数学 · 对数与首位数字

> **STEP I 2000，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q1

## 关键思路

一个大数 $N$ 的首位数字（leading digit）完全取决于 $\log_{10} N$ 的小数部分（fractional part）。若 $\log_{10} N = k + f$，其中 $k$ 为整数而 $0 \le f < 1$，则 $N = 10^f \times 10^k$，而 $N$ 的首位数字是 $d$，当且仅当 $\log_{10} d \le f < \log_{10}(d+1)$。因此我们只需要数字 1 至 9 的对数（logarithm），它们都可由 $\log_{10} 2$ 和 $\log_{10} 3$ 求得；此外还要留心我们能够容许多大的舍入误差（rounding error）。

## 解答

以下 log 一律表示 $\log_{10}$。区间 $[0,1)$ 分成九段，每段对应一个可能的首位数字：




小数部分 $f$ 落在标示为 $d$ 的一段内，首位数字就是 $d$。

### 第 (i) 部分

由于 $5 = 10/2$ 及 $6 = 2 \times 3$，

$$\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - 0.301029996 = 0.698970004 \approx 0.699,$$
$$\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.301029996 + 0.477121255 = 0.778151251 \approx 0.778,$$

两者均准确至小数点后三位。

现在

$$\log 3^{100} = 100 \log 3 = 47.7121255.$$

题目所给的 $\log 3$ 的值，误差不超过 $5 \times 10^{-10}$，所以上式的误差不超过 $5 \times 10^{-8}$；必定有 $47.712 < \log 3^{100} < 47.713$。与

$$\log\left(5 \times 10^{47}\right) = 47 + \log 5 \approx 47.699 \quad \text{及} \quad \log\left(6 \times 10^{47}\right) = 47 + \log 6 \approx 47.778,$$

比较，可得

$$\log\left(5 \times 10^{47}\right) < \log 3^{100} < \log\left(6 \times 10^{47}\right).$$

两边的余裕（约 0.013 和 0.066）远远大于任何舍入误差，而 log 是严格递增（strictly increasing）的，所以

$$5 \times 10^{47} < 3^{100} < 6 \times 10^{47},$$

正如所求。因此 $3^{100}$ 是 $5.\ldots \times 10^{47}$：它的首位数字是 $\boxed{5}$（而且它共有 48 位数字）。

**第 (ii) 部分**

我们沿用同一个想法，取 $\log 2 = 0.301029996$，其误差至多为 $5 \times 10^{-10}$。乘以 $10^n$ 会把这个误差也乘以 $10^n$，所以我们必须检查小数部分是否仍然稳妥地留在数线上的同一段之内。

$2^{1000}$. $\log 2^{1000} = 301.029996$, 误差至多为 $5 \times 10^{-7}$。小数部分约为 0.030, 介乎 $\log 1 = 0$ 与 $\log 2 \approx 0.301$ 之间，所以 $2^{1000} = 1.\ldots \times 10^{301}$，其首位数字是 $\boxed{1}$。

$2^{10\,000}$. $\log 2^{10\,000} = 3010.29996$，误差至多为 $5 \times 10^{-6}$。小数部分介乎 0.299955 与 0.299965 之间。

> **想一想** 小数部分 0.29996 非常接近 $\log 2 = 0.30103$。我们能肯定首位数字不是 2 吗?

能够: 两者相差 $0.30103 - 0.29996 \approx 0.0011$, 是最大可能误差 $5 \times 10^{-6}$ 的二百多倍。所以小数部分确实小于 $\log 2$，而 $10^{3010} < 2^{10\,000} < 2 \times 10^{3010}$。（等价地，$2^{10\,000} < 2 \times 10^{3010}$ 即是说 $2^{9999} < 10^{3010}$，亦即 $\log 2 < 3010/9999 = 0.3010301\ldots$，而这是成立的。）首位数字是 $\boxed{1}$。

$2^{100\,000}$. $\log 2^{100\,000} = 30102.9996$，误差至多为 $5 \times 10^{-5}$，所以小数部分介乎 0.99955 与 0.99965 之间。我们需要知道它落在数线上的哪一段，而最顶的一段始于

$$\log 9 = 2 \log 3 = 0.954242510.$$

由于 $0.954 < 0.99955$ 及 $0.99965 < 1$，我们得到 $9 \times 10^{30102} < 2^{100\,000} < 10^{30103}$，所以首位数字是 $\boxed{9}$。

**想一想** 误差会不会把小数部分推过 1，令这个数变成 $1.\ldots \times 10^{30103}$?

除非 $100\,000 \log 2$ 的真确值至少是 30103 才会如此，而这需要它有 0.0004 的误差，是最大误差 $5 \times 10^{-5}$ 的八倍。所以首位数字是 9，而 $2^{100\,000}$ 共有 30 103 位数字。

## 验算

用电脑作精确的整数运算，可证实以上所有结果：$3^{100}$ 有 48 位数字，开首为 $515\ldots$；$2^{1000}$ 开首为 $107\ldots$（共 302 位数字）；$2^{10\,000}$ 开首为 $199\ldots$（共 3011 位数字）；而 $2^{100\,000}$ 开首为 $999\ldots$（共 30 103 位数字）。再用一个简单例子检验这个方法是否合理：$\log 2^{10} = 3.0103$ 的小数部分为 $0.0103 < \log 2$，与 $2^{10} = 1024$ 吻合。

## 常见错误

- 从对数的整数部分（integer part）读出首位数字。整数部分只能告诉我们位数（位数比它多一）；首位数字藏在小数部分之中。
- 忘记乘以 100 000 时，$\log 2$ 的舍入误差也会同样被放大。在这里九位小数仅仅足够，而且值得说明原因。
- 看见 $f = 0.9996 \approx 1$ 便断定首位数字是 1。小数部分略小于 1，表示这个数略小于十的某个幂，所以它以 9 开首。

## STEP 之外

$2^n$ 的首位数字由 $n \log 2$ 的小数部分决定。由于 $\log 2$ 是无理数（irrational），这些小数部分在 $[0,1)$ 内是等分布（equidistributed）的（外尔（Weyl）等分布定理），所以在 2 的幂之中，以数字 $d$ 开首的所占比例趋向 $\log(1 + 1/d)$：这就是本福特定律（Benford's law），而大约 30% 的 2 的幂以 1 开首。至于无理性与逼近这方面的故事，达文波特（Davenport）的 *The Higher Arithmetic* 是一本十分值得一读的好书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。