9.8 没有人拿到自己的恤衫

工作纸

题目

STEP II 2016，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s2-q12

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **停一停，试一试**　先试 $n = 3$：列出卡 $1, 2, 3$ 的全部六种次序，数一数其中有多少种是没有任何一张卡在自己位置上的。如果你有耐性，再试 $n = 4$（共有 24 种次序）。

阶段 1　三个事件的容斥原理（inclusion–exclusion）

涵盖：三个事件，以及四个事件

> **想一想**　把 $A \cup B$ 当作单一事件（event），再与 C 一起套用两个事件的公式。你会用到 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$。

阶段 2 各个概率

涵盖：第 (i) 至 (iii) 部分

想一想 若第 i 张卡在第 i 个位置，其余的卡有多少种排列方法？若第 i 张和第 j 张卡都在自己的位置上，又有多少种？

阶段 3 全部加起来

涵盖：至少有一张卡在自己的位置上

停一停，试一试 在 $\mathrm{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$ 的公式中，有多少项涉及 k 个事件的交集（intersection）？把项数乘以每一项的概率（probability），然后化简。几乎所有东西都会约去。

阶段 4　恰好一张

涵盖：恰好有一张卡在自己的位置上

> **想一想**　先选定哪一张卡在自己的位置上。其余 $n-1$ 张卡必须怎样排？把你上一题的答案套用到 $n-1$ 张卡的情况。

背后的数学

e 从何而来

级数 $\sum(-1)^k/k!$ 就是指数级数（exponential series）$e^x=\sum x^k/k!$ 在 $x=-1$ 时的值。所以当 $n\to\infty$ 时，

$$d_n \to e^{-1} \approx 0.3679,$$

而恰好有一张卡对上的概率也趋向同一个极限。收敛（convergence）的速度快得惊人（图 9.8.1）：在 $1/n!$ 一项停下来所产生的误差小于 $1/(n+1)!$，所以在 $n=7$ 时，答案已经与 $1/e$ 吻合至小数点后四位。事实上，n 件物件的错排数目 $n!\,d_n$ 恰好是最接近 $n!/e$ 的整数。

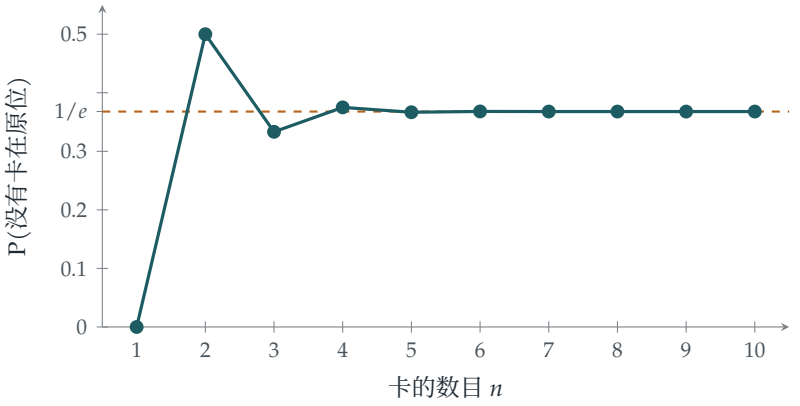

图 9.8.1 把 n 张卡随机洗匀后，没有任何一张卡留在自己位置上的概率。它在 $1/e$ 的上下交替出现，而由 $n = 6$ 开始，在这个比例尺下已经与 $1/e$ 无法分辨。

对上的数目服从泊松分布

结论还不止于此。设 N 为在自己位置上的卡的数目。那么对每个 k，都有 $\mathrm{P}(N = k) \to \frac{e^{-1}}{k!}$：在极限之下，对上的数目服从平均值为 1 的泊松分布（Poisson distribution）。平均值为甚么是 1，不用任何计算也看得出来：N 是 $E_1, \ldots, E_n$ 的指示变量（indicator）之和，每个的期望值（expectation）都是 $\frac{1}{n}$，而即使这些事件并非独立，期望值仍然可以相加。STEP III 2004 Q12（见练习）证明方差（variance）同样是 1。每当有许多机会很微、又近乎独立的事件时，泊松分布就会出现；错排是一个经典例子，也是第 12 章 Section 12.11 的主题。

Montmort 的 *treize* 游戏

Pierre Rémond de Montmort 是一位法国贵族，他在著作 *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*（1708）中研究各种博彩游戏。在 *treize*（十三）这个游戏中，玩家派出十三张牌，同时口中数着“一、二、三……”，只要有一次派出的牌与所数的数字相同，便算胜出。Montmort 求出了胜出的概率，并在与尼古拉·伯努利（Nicolaus Bernoulli）的通信中，于 1713 年或之前确立了一般公式。欧拉（Euler）在 1753 年重新发现了这条公式。容斥原理其后由棣莫弗（Abraham de Moivre）加以形式化，而它的一般形式则由西尔维斯特（James Joseph Sylvester）在十九世纪建立。

延伸练习

1 **球衣。**试做 STEP III 2004，第 12 题（step.maths.org/questions/04-s3-q12）。这道题用指示变量计数穿上自己球衣的球员人数，求出平均值和方差，并把结果与泊松分布比

较。

2 **递推关系。**设 D_n 为 n 件物件的错排数目。考虑卡 1 去了哪个位置，以及原本在该位置的卡是否去了位置 1，证明 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$。用 $D_3 = 2$、$D_4 = 9$ 验算。

3 **恰好 k 张。**证明恰好有 k 张卡在自己位置上的概率是 $\frac{1}{k!}d_{n-k}$，并且它趋向 $\frac{e^{-1}}{k!}$。

4 **互质的整数。**用容斥原理计数由 1 至 30 的整数中，不能被 2、3 和 5 任何一个整除的有多少个。你的答案与 $30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$ 有甚么关系？

延伸阅读

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。大学一年级教科书，涵盖容斥原理和配对问题。
- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley），第 IV 章。经典之作，载有配对问题的许多变化。
- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific），关于容斥原理的部分。

完整的引导式解答见第 9.8 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/derangements.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com