9.7 相等的幂和

工作纸

题目

STEP I 1992，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s1-q5

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　若多项式 $\mathrm{p}(x)=\sum c_k x^k$ 满足 $\mathrm{p}(1)=0$，这对各系数（coefficient）有甚么含意？若 $\mathrm{p}'(1)=0$ 又如何？

阶段 1　三重根（triple root）

涵盖：因式 $(1-x)^3$

> **想一想**　把 $1-x^2$ 和 $1-x^4$ 尽量因式分解（factorise）。合共得到多少个 $1-x$ 的因式？

阶段 2 在 1 处的导数（derivative）

涵盖：$\mathrm{p}_0'(1)=0$ 和 $\mathrm{p}_1'(1)=0$

停一停，试一试 写成 $\mathrm{p}_0(x)=(1-x)^3\mathrm{q}(x)$，再用积法则（product rule）求导。$1-x$ 的几次幂能整除 p_0'？那么 $\mathrm{p}_1=x\mathrm{p}_0'$ 呢？p_1' 又如何？

阶段 3 读出系数（coefficient）

涵盖：两个恒等式（identity）

想一想 把 p_0 展开。用系数 c_k 表示 $\mathrm{p}_0'(1)$ 和 $\mathrm{p}_1'(1)$。哪些位置是 $+1$，哪些位置是 -1？

阶段 4　再多一个因式

涵盖：最后一部分

> **停一停，试一试**　要令立方和也相等，你需要第四个 $1 - x$ 的因式。把 p_0 乘以 $1 - x^8$。读出由 0 至 15 各项系数的正负号，然后按正负号把这些数分成两组。

背后的数学

Thue–Morse 数列

$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^4)(1 - x^8)\cdots$ 各系数的正负号构成 *Thue–Morse 数列*。以 0 代表 $+$、1 代表 $-$，写出来就是：

$$0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\ \ldots$$

它有三种等价的描述。

- **倍增：**由 0 开始，不断把手上已有的部分的补（complement，即把 0 与 1 互换）接在后面：$0 \to 01 \to 0110 \to 01101001 \to \cdots$。
- **二进制数字：**把 k 写成二进制（binary）时，若当中 1 的个数是偶数，第 k 项便是 0；若是奇数，便是 1。（这就是 x^k 的正负号为 $(-1)^{1\text{ 的个数，取自 }k}$ 的原因：要从乘积中得出 x^k，就要选取那些在二进制中组成 k 的因子 x^{2^m}，而每一个都带来一个负号。）
- **多项式：**$\prod_m (1 - x^{2^m})$ 的各系数，一如题目所示。

按 Thue–Morse 数列把 $0, 1, \ldots, 2^N - 1$ 分开，所得的两个集合对于每个 $r < N$ 都有相等的 r 次方之和（图 9.7.1）。这就是 *Prouhet–Tarry–Escott 问题*（Prouhet–Tarry–Escott problem）：找出两个不同的整数集合，使它们的 r 次方之和在 $r = 1, \ldots, k$ 时全部相等。Prouhet 的解用了 2^{k+1} 个数；究竟最少需要多少个数，是一个著名的未解决问题。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

$1+4+6+7+10+11+13+16=68$

$2+3+5+8+9+12+14+15=68$

平方：$748=748$　　立方：$9248=9248$　　四次方：$122\,692\neq 121\,156$

图 9.7.1　按 Thue–Morse 数列分开的 1 至 16。两个集合的和相等、平方和相等、立方和也相等，但四次方之和并不相等；要做到这一点，便需要 1 至 32。由左至右读出颜色，得到的规律是蓝绿–紫–紫–蓝绿、紫–蓝绿–蓝绿–紫、…。

最公平的轮流方式

两个小孩轮流从一堆糖果中挑选，最好的先被选走。若他们以 $ABABAB\ldots$ 的次序交替，那么每一对糖果中较好的一颗总是归 A，这是一种系统性的优势。$ABBA$ 的次序较为公平，而 $ABBABAAB$ 更加公平：这正是 Thue–Morse 数列，而次方和平衡恰恰就是个中原因。若糖果的价值由其位置的一个光滑函数给出，把该函数展开成多项式，便可看到 Thue–Morse 次序会把它的首几项抵销。同样的想法曾被提议用于足球的互射十二码（足球规则制定者自 2017 年起试行的“$ABBA$”次序），而网球决胜局的发球次序亦采用这个方式。

Thue、Morse 与 Euwe

这个数列曾多次被人发现。Prouhet 在 1851 年用过它。Axel Thue 在 1912 年研究没有重复规律的数列时重新发现了它：它永远不会连续三次出现同一段（即它是“无立方”（cube-free）的）。Marston Morse 在 1921 年研究曲面上的测地线（geodesics）时再次发现它。而国际象棋世界冠军尤伟（Max Euwe）在 1929 年用它证明了，当时生效的重复局面和棋规则并不能防止对局无限延续下去。时至今日，它是*自动数列*（automatic sequences）理论中的核心例子；自动数列是指由简单机器读取 n 的二进制数字而计算出来的数列。

延伸练习

1 **平移。**试做 STEP II 2025，第 8 题（载于 OCR 提供下载的 2025 年试卷，www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip）。该题说明怎样把一个令和与平方和平衡的分法，通过平移其中一列再合并，变成一个更大而且连立方和也平衡的分法。

2 **平方的平方。**（同样出自 STEP II，2025。）集合 $A=\{1,3,4,5,9,11\}$ 和 $B=\{2,6,7,8,10\}$ 的和相等，平方和也相等。对于每个正整数 n，把 $\{n^2,(n+1)^2,\ldots,(n+11)^2\}$ 分成两个和相等的集合。（提示：把 0 加入第二个集合。）

3 **平移不变性 (translation invariance)。**证明：若两个数集的 r 次方之和在 $r = 0, 1, \ldots, k$ 时全部相等，那么把每个元素都加上同一个数 c 所得的两个集合亦然。为甚么这表示题目中的集合 $\{1, \ldots, 15\}$ 同样可以换成任意 16 个连续整数？

4 **公平分糖果。**糖果的价值为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{8}$。比较 A 在 $ABABABAB$ 和 $ABBABAAB$ 两种次序下所得的总值。

延伸阅读

- **Jean-Paul Allouche & Jeffrey Shallit, "The ubiquitous Prouhet–Thue–Morse sequence"**，载于 *Sequences and Their Applications*（Springer, 1999）。综述这个数列在各处的出现；可在网上免费阅读。
- **Matt Parker, *Things to Make and Do in the Fourth Dimension***（Penguin）。内容包括等次方和及其他数字趣闻。
- **Joshua Cooper & Aaron Dutle, "Greedy Galois games"**，*American Mathematical Monthly* 120 (2013)。公平轮流与 Thue–Morse 数列。

完整的引导式解答见第 9.7 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/equal-power-sums.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com