9.6 奇怪的骰子

工作纸

题目

STEP I 1993，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q1

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　假设第一颗骰子有 p_i 个面显示 i，第二颗有 q_j 个面显示 j，那么掷出点数和 t 共有多少种方法？

阶段 1　两端的情况

涵盖：找出新的点数编排

> **想一想**　把两颗骰子称为 A 和 B，其中分别有 a_i 和 b_i 个面显示 i。点数总和不可能掷出 2。这对 $a_1 b_1$ 说明了甚么？掷出 3 的方法有两种：这些方法来自哪些乘积？

阶段 2 由小至大推算

涵盖：找出新的点数编排

> **停一停，试一试** 假设 1 都在 A 上，所以 $b_1 = 0$。这时 (a_1, b_2) 有两种情况。先写出总和为 4 的方程，再写出总和为 5 的方程，然后在每种情况下求解。

阶段 3 情况 (a) 不成立

涵盖：找出新的点数编排

> **想一想** 在 $a_1 = 2$、$b_2 = 1$ 的情况下，写出总和为 7 的方程。B 还剩下多少个面可以用来放 5 和 6？这可能吗？

阶段 4 情况 (b) 成立

涵盖：找出新的点数编排

> **想一想** 在另一种情况下，利用总和 6 和 11，以及“总和不可能是 12”即 $a_6 b_6 = 0$ 这一事实。最后，检查你的两颗骰子能否给出整个表。

背后的数学

把骰子看成多项式

把每颗骰子写成一个多项式：每个显示 i 的面对应一项 x^i。普通骰子是 $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$，而题目中的两颗骰子是

$$A(x) = x + x^4 + x^5 + 3x^6, \qquad B(x) = 2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5.$$

相乘时，每一对面贡献 $x^i x^j = x^{i+j}$，所以 $A(x)B(x)$ 中 x^t 的系数（coefficient），就是掷出点数和 t 的方法数目。这又是 Section 9.4 中母函数（generating function）的想法：点数和的列表其实就是乘积 $A(x)B(x)$，而我们逐个情况的推论，正是把它因式分解（factorise）的一种方法。

Sicherman 骰子

两颗普通骰子的乘积是 $(x + x^2 + \cdots + x^6)^2$。任何一对点数和分布相同的骰子，其多项式 $P(x)$、$Q(x)$ 必须满足 $P(x)Q(x) = (x + \cdots + x^6)^2$。现在作因式分解：

$$x + x^2 + \cdots + x^6 = x(1 + x)(1 + x + x^2)(1 - x + x^2),$$

而这些因式不能再进一步分解（成为整数系数的多项式）。所以 P 和 Q 都必须由因式 x、$1 + x$、$1 + x + x^2$、$1 - x + x^2$ 组成，而每个因式合共出现两次。以下三个条件把选择收窄：

- 每颗骰子有 6 个面，所以 $P(1) = Q(1) = 6$；各因式在 $x = 1$ 时的值分别是 1、2、3、1，所以每颗骰子各得一个 $1 + x$ 和一个 $1 + x + x^2$；

- 没有任何面显示 0，所以 $P(0) = Q(0) = 0$：每颗骰子各得一个因式 x；
- 余下唯一的自由，是两个 $1 - x + x^2$ 如何分配。每颗各得一个，就是普通骰子。两个都归同一颗骰子，则得

$$x(1+x)(1+x+x^2) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4,$$
$$x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2 = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8.$$

这就是 Sicherman 骰子，1, 2, 2, 3, 3, 4 和 1, 3, 4, 5, 6, 8（图 9.6.1），而以上论证亦证明了它们是唯一的另一种可能。关键在于：多项式与整数一样，可以唯一地分解为不可约（irreducible）因式的乘积——数论与组合数学（combinatorics）在此相遇。

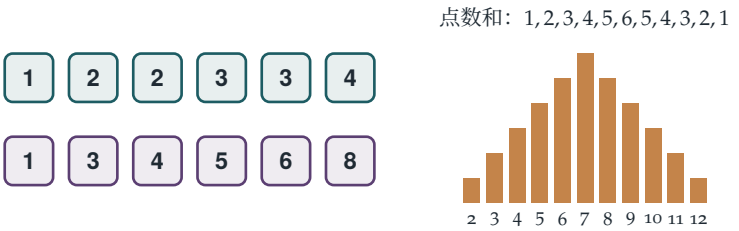


图 9.6.1 Sicherman 骰子。两颗一起掷，由 2 到 12 的每个点数和出现的频数，都与两颗普通骰子完全相同（右）：掷出 2 有一种方法，掷出 3 有两种方法，如此类推，直至掷出 7 有六种方法。

概率母函数

在概率论中，同一个想法以*概率母函数*（probability generating function）的形式出现：取值 $0, 1, 2, \ldots$ 的随机变量（random variable）X 有 $G(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum \mathrm{P}(X = k)t^k$，而对于独立（independent）的 X 和 Y，$\mathrm{E}(t^{X+Y}) = \mathrm{E}(t^X)\mathrm{E}(t^Y)$。独立随机变量之和，对应于母函数之积。STEP III 2003 Q14（见练习）就是用这个方法找出 Sicherman 骰子，而 Section 9.13 则用一个相关的论证，说明无论怎样在两颗骰子上做手脚，都不能令所有点数和出现的机会均等。

延伸练习

1 **四面体骰子。**试做 STEP III 2003，第 14 题（step.maths.org/questions/03-s3-q14），该题就四面骰子提出 Sicherman 的问题。（提示：$x + x^2 + x^3 + x^4 = x(1+x)(1+x^2)$。）

2 **验证列表。**展开 $(x + x^4 + x^5 + 3x^6)(2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5)$，并与题目中的列表对照。

3 **三颗骰子。**是否存在三颗六面骰子，各面标上正整数，不全是标准骰子，而其点数和的分布与三颗标准骰子相同？（提示：$(x + \cdots + x^6)^3$ 的因式现在包括三个 $1 - x + x^2$。）

4 **一枚硬币与一个八面体。**一颗标上 $1,\ldots,8$ 的八面骰子，和一颗标上 $1,2$ 的两面“骰子”（即一枚硬币）：能否用另一种方式重新标号，而点数和的分布保持不变？

延伸阅读

- **Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers***（Mathematical Association of America）。收录了关于 Sicherman 骰子的那篇专栏文章。
- **Joseph Gallian & David Rusin, “Cyclotomic polynomials and nonstandard dice”,** *Discrete Mathematics* 27 (1979)。一般理论，适用于任意面数的骰子。
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（可于网上免费阅览），第 1 章。

完整的引导式解答见第 9.6 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/strange-dice.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com