9.5 凑零钱

工作纸

题目

STEP I 1997，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s1-q1

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停*，*试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　只用 2p 和 1p 硬币，凑出 n 便士有多少种方法？为甚么答案只取决于你用了多少枚 2p 硬币？

阶段 1　十便士

涵盖：making 10 pence

> **想一想**　按面值最大的硬币来分类。你要么用一枚 10p 硬币，要么不用。如果不用，可以用多少枚 5p 硬币？然后数一数用 2p 和 1p 硬币凑出余下金额的方法有多少种。

阶段 2 逐层累积

涵盖：making 20 pence

停一停，试一试 设 $b(n)$ 为用 5p、2p 和 1p 硬币凑出 n 便士的方法数目。先选定 5p 硬币的枚数，再把 $b(n)$ 写成若干个“只用 2p 和 1p 硬币”的方法数目之和。为 $n = 0, 5, 10, 15, 20$ 列一个表。

想一想 现在用同样的方法加入 10p 硬币，并利用你求得的 b 值。

阶段 3　二十便士

涵盖：making 20 pence

> **想一想**　最后一步：你要么用那枚 20p 硬币，要么不用。把各种情况加起来。

背后的数学

把硬币看成等比级数

以下这个想法把问题化为代数。所用 5p 硬币的数目可以是 $0, 1, 2, \ldots$，分别贡献 $0, 5, 10, \ldots$ 便士。把这一点记录成级数

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \frac{1}{1 - x^5}.$$

对每种硬币都这样做，然后相乘：

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})} = \sum_{n} w(n) x^n.$$

把各括号乘开时，每一项 x^n 都来自在每个括号中各选一项，也就是为每种硬币各选一个数目，而总值为 n。所以 x^n 的系数 $w(n)$ 正好就是凑出 n 便士的方法数。第 2 阶段的表格，其实就是把这个乘积逐个括号乘开。这正是 Section 9.4 中母函数（generating function）的想法，而乘法正是它大显威力之处：母函数之积所计算的，就是各项选择的组合数目。

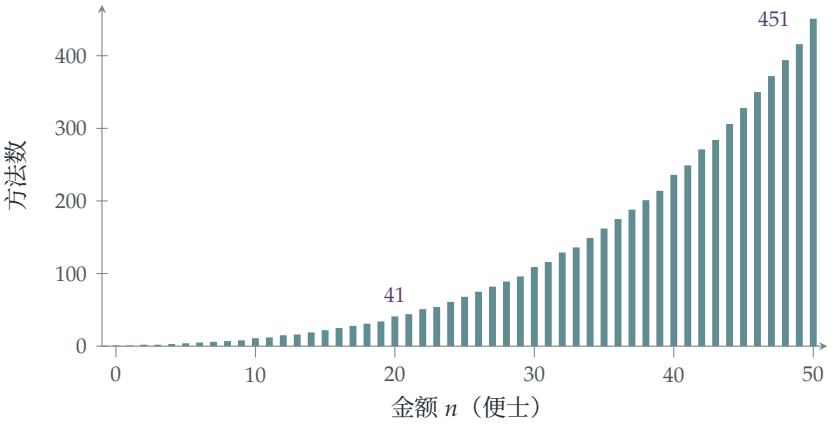

图 9.5.1 用 1p、2p、5p、10p、20p 和 50p 硬币凑出 n 便士的方法数。在 5 和 10 的倍数处出现的跳升，显示新硬币首次可用的位置。有六种硬币时，方法数的增长大致与 n^5 相若：一般而言，增长有如一个多项式，其次数比硬币种数少一。

分拆

假如每个正整数都可以作为硬币的面值，又会怎样？这时，不计次序而把 n 写成正整数之和的方法数，就是*分拆数*（partition number）$p(n)$。例如 $p(4)=5$，因为 $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$。欧拉在 1748 年看出

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots},$$

并用它发现了一些非凡的恒等式（identity）。其中之一是：把 n 写成*互不相同*的部分之和的方法数，等于把它写成*奇数*部分之和的方法数。（用母函数来证明，只需一行代数：请在练习中一试。）

哈代、拉马努金与 $p(200)$

分拆数增长得很快：$p(10)=42$，$p(100)=190\,569\,292$。1918 年，哈代（G. H. Hardy）与拉马努金（Srinivasa Ramanujan）为 $p(n)$ 找到一条令人惊叹的公式，那是一个无穷级数（infinite series），其首项为

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

为了检验这条公式，Percy MacMahon 利用欧拉的恒等式，徒手算出 $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$。哈代与拉马努金的级数只取首几项，所得结果与正确答案相差不足一。拉马努金还发现 $p(5n+4)$ 必定可被 5 整除，$p(7n+5)$ 必定可被 7 整除，而 $p(11n+6)$ 必定可被 11 整除。至于为何再没有其他这类规律，则要到二十一世纪才得到解释。

延伸练习

1 **两种六。**试做 STEP II 2012，第 1 题（step.maths.org/questions/12-s2-q1）。该题利用等比级数之积来计数。做完之后，请描述一个以这些系数为答案的硬币计数问题。

2 **互异与奇数。**证明 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$ 是分拆成互不相同部分的母函数。利用 $1+x^k=\frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$ 证明它等于 $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}$，并由此推出欧拉定理。就 $n=6$ 验证这个结果。

3 **一条公式。**证明只用 1p、2p 和 5p 硬币凑出 n 便士的方法数，是最接近 $\frac{(n+4)^2}{20}$ 的整数。（先用较小的 n 验证。）

4 **次序有别。**把 1p 和 2p 硬币逐枚投入投币口来凑出 n 便士，若次序有别，共有多少种方法？（这个数列（sequence）你以前见过。）

延伸阅读

- **George Andrews & Kimmo Eriksson, *Integer Partitions***（Cambridge University Press）。一本为大学本科生而写的入门书，篇幅短小，浅白易读。
- **波利亚（George Pólya），“On picture-writing”**，*American Mathematical Monthly* 63 (1956)。波利亚以兑换一美元的问题（共有 292 种方法）来讲解母函数的经典文章。
- **Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity***（Abacus）。拉马努金的生平，以及他与哈代的合作。

完整的引导式解答见第 9.5 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/making-change.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com