9.4 把数列看成函数

工作纸

题目

STEP I 2016，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s1-q8

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　哪个数列的生成函数是 $\dfrac{1}{1-x}$？$\dfrac{1}{1-2x}$ 又如何？如果把一个数列的生成函数乘以 x，数列会有甚么变化？

阶段 1 自然数与三角形数

涵盖：第 (i) 部分

想一想 用二项式级数（binomial series）展开 $(1-x)^{-2}$ 和 $(1-x)^{-3}$。两者之中 x^n 的系数（coefficient）分别是甚么？乘以 x 又会有甚么效果？

停一停，试一试 用 n 和 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 表示 n^2。生成函数（generating function）可以相加，正如数列（sequence）可以相加一样。

阶段 2　递推关系化为方程

涵盖：第 (ii)(a) 部分

> **停一停，试一试**　把 $u_n = ku_{n-1}$ 乘以 x^n，再对所有 $n \geq 1$ 求和。把等式两边各以 $\mathrm{f}(x)$ 表示，并记住左边的和式欠缺 $n = 0$ 的一项。

阶段 3　斐波那契数

涵盖：第 (ii)(b) 部分

> **想一想**　对 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ 作同样的处理，对 $n \geq 2$ 求和。每个和式各欠缺了开首的哪几项？然后代入 $u_0 = 0$ 和 $u_1 = 1$。

阶段 4 **解释** 1/89

涵盖：题目以外

? **想一想** 在第 (ii)(b) 部分的答案中代入 $x = \frac{1}{10}$。你留意到甚么?

背后的数学

从生成函数到公式

生成函数不只是把数列编码：它还可以把数列解出来。分母可以因式分解为 $1 - x - x^2 = (1 - \varphi x)(1 - \psi x)$，其中 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 是 $t^2 = t + 1$ 的根。由部分分式（partial fractions）可得

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x}\right),$$

再把每个分式展开成等比级数，

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

这就是*比内公式*（*Binet's formula*）。由于 $|\psi| < 1$，第二项非常小，所以 F_n 是最接近 $\varphi^n/\sqrt{5}$ 的整数，而相邻两个斐波那契数之比趋向黄金比（golden ratio）（这是 Section 2.2 的主题）。同一方法可以解任何常系数线性递推关系（linear recurrence with constant coefficients）；练习中有一个来自 STEP I 2004 的例子。

生成函数为何如此有用

真正的威力在相乘时才显现出来。乘积 $f(x)g(x)$ 中 x^n 的系数是 $\sum_k u_k v_{n-k}$，即对所有把 n 拆成两部分的方法求和。要数算由两个部分组成的东西，这正是我们所需要的。接下来的两节会用它来数算找换零钱的方法（Section 9.5），以及找出点数古怪、但总和的分布与普通骰子相同的骰子（Section 9.6）。在概率中，同一想法给出*概率生成函数*（*probability generating function*），它把独立随机变量之和变成乘积。

棣莫弗、欧拉与拉普拉斯

棣莫弗（Abraham de Moivre）在 1720 年代用生成函数来解线性递推关系，所用的方法基本上就是上面的方法。欧拉（Leonhard Euler）在 1748 年用它们来研究整数的分拆（partitions），而拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace）则以它们作为其著作 *Théorie analytique des probabilités*（1812）的基础。到了二十世纪，生成函数成为组合数学的核心，而解析方法（把生成函数看成复变量的函数来研究）如今能为复杂得无法精确求解的计数问题给出精确的估计。

延伸练习

1 **每次两位数字。**试做 STEP II 2022，第 3 题（载于 OCR 提供下载的 2022 年试卷，www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip）。它解释了为何 $\frac{1}{89}$ 的小数展开式以斐波那契数开首，并要求找出一个分数，其小数每次两位数字地显示这个规律。

2 **解递推关系。**试做 STEP I 2004，第 7 题（step.maths.org/questions/04-s1-q7）。它用生成函数和部分分式解一个线性递推关系，然后把这个方法倒过来做。

3 **逐一数数。**证明 $\frac{1}{9801} = 0.00\,01\,02\,03\,04\ldots$，其中每两位数字为一组，逐一向上数。这个规律最先在哪里出错？为甚么？

4 **平方和。**解释为何 $\frac{1}{1-x}\mathrm{f}(x)$ 是部分和 $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ 的生成函数。利用这一点和第 (i) 部分的答案，求 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的公式。

延伸阅读

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（A K Peters；网上免费阅读）。经典的入门书。读完本节后，最适合接着读第 1 章。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley），第 7 章。
- **Philippe Flajolet & Robert Sedgewick, *Analytic Combinatorics***（Cambridge University Press；网上免费阅读）。远远超出大学一年级的程度，但开首数页展示了这门学问的去向。

完整的引导式解答见第 9.4 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/generating-functions.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com