9.3 为篱笆桩着色

工作纸

题目

STEP II 1995，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s2-q2

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

停一停，试一试　数一数为围成一圈的 3 根柱子髹色有多少种方法，4 根又有多少种。$3 \times 2^{n-1}$ 有没有多算？多算了多少？

阶段 1 两类涂色方式

涵盖：为何 $r_{n+1} = s_n$，以及求 $r_n + s_n$

停一停，试一试 考虑 $n+1$ 根柱的一种涂色（colouring）方式，其中第一根和最后一根柱都是红色。第 n 根柱可以是甚么颜色？把最后一根柱移走：余下的是 n 根柱的哪一类涂色方式？你能否反过来，由后者还原出前者？

想一想 $r_n + s_n$ 所数算的，是 n 根柱中第一根为红色的所有涂色方式。第一根之后的每根柱各有多少种选择？

阶段 2　以归纳法证明公式

涵盖：归纳法

> **想一想**　先验证 $n = 1$ 的情况。然后把 r_n 的公式代入 $r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n$，再化简。这就是数学归纳法（induction）的归纳步骤。

阶段 3 圆形

涵盖：围成一圈的柱

> **停一停，试一试** 固定第 1 根柱为红色，并在第 n 根柱与第 1 根柱之间把圆圈剪开，使各柱排成一直线。这条直线上的涂色方式必须满足哪个额外条件？r_n 和 s_n 之中，哪一个数算的正是这些涂色方式？第 1 根柱可以有多少种颜色？

背后的数学

色多项式

柱子和它们之间的相邻关系构成一个*图*（graph）：排成一列时是一条路径（path），围成一圈时是一个圈（cycle）。*正常着色*（proper colouring）给相邻的顶点（vertex）不同的颜色。用 k 种颜色的正常着色数目是 k 的一个多项式，称为该图的*色多项式*，由伯克霍夫（George Birkhoff）于 1912 年引入。用 k 种颜色重复题目中的论证，可得

$$\text{路径：}\ k(k-1)^{n-1}, \qquad \text{圈：}\ (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

取 $k=3$，圈的公式就是 $2^n + 2(-1)^n$。伯克霍夫希望通过证明每幅地图所对应的图的色多项式在 $k=4$ 时为正数，从而证明四色定理（每幅地图都可以用四种颜色着色，使相邻的国家颜色不同）。这个方法始终未能成功；定理最终在 1976 年由阿佩尔（Kenneth Appel）和哈肯（Wolfgang Haken）借助大量电脑运算证明。色多项式至今仍是一个活跃的研究领域，并与统计物理（statistical physics）有出人意表的联系：在那里它们以描述磁性的*波茨模型*（Potts model）的形式出现。

用矩阵数出同一个答案

还有另一种方法可以看出答案，用的是第 7 章的线性代数（linear algebra）。设 $\mathbf{M}$ 为对角线上是 0、其余位置是 1 的 3×3 矩阵：当颜色 j 可以跟在颜色 i 之后时，第 (i,j) 项为 1。那么 $\mathbf{M}^{n-1}$ 的第 (i,j) 项数的是由颜色 i 开始、以颜色 j 结束的直列着色，所以 r_n

是 $\mathbf{M}^{n-1}$ 的一个对角线项。圆圈着色是经过 n 步后回到起点的一个序列，所以圆圈着色的数目就是 $\mathbf{M}^n$ 的迹（trace）。由于 $\mathbf{M} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$，其中 $\mathbf{J}$ 的每一项都是 1，$\mathbf{M}$ 的特征值（eigenvalue）是 $3-1=2$（特征向量（eigenvector）为 $(1,1,1)$）和 -1（两重），而 $\mathbf{M}^n$ 的迹是各特征值的 n 次方之和：

$$\operatorname{tr}\mathbf{M}^n = 2^n + (-1)^n + (-1)^n = 2^n + 2(-1)^n.$$

这种转移矩阵（transfer matrix）方法在组合数学（combinatorics）和统计物理中随处可见，用来数算逐步构造出来的排列。

延伸练习

1 **k 种颜色。**用 k 种颜色重做这道题。证明 $r_{n+1} = s_n$ 仍然成立，并且 $r_{n+1} + r_n = (k-1)^{n-1}$，求 r_n，并由此推导出圈的色多项式 $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$。

2 **没有两根红柱相邻。**把排成一列的 n 根柱子髹成红色或白色，而且没有两根相邻的柱子同为红色，共有多少种方法？（你应该会得到斐波那契数（Fibonacci numbers）。）

3 **轮子。**加一根位于中心的柱子，与圆圈上的每根柱子都相邻（一个“轮子”）。用 4 种颜色为它着色有多少种方法？（提示：中心用去一种颜色，圆圈必须使用其余三种。）

4 **项链。**如果圆圈的两种着色在其中一种可由另一种旋转而得时视为相同，那么当 $n = 4$ 时有多少种不同的着色？$n = 5$ 时呢？（这是伯恩赛德引理（Burnside's lemma）的开端。）

延伸阅读

- **Robin Wilson, *Introduction to Graph Theory***（Pearson）。标准的图论入门教材；涵盖着色和四色问题。
- **Robin Wilson, *Four Colours Suffice***（Penguin）。四色定理的故事，为一般读者而写。
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（可在网上免费阅读）。讲述递归关系及其解法，包括转移矩阵方法。

完整的引导式解答见第 9.3 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/fence-posts.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com