9.2 小型版的拉姆齐定理

工作纸

题目

STEP I 1989，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s1-q4

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　那六个点之所以重要，只在于哪些点对以哪种颜色相连：几何只会令人分心。一共有多少条线段？每个点又连出多少条？

阶段 1　五条线段，两种颜色

涵盖：six points

> **想一想**　从点 A 出发有五条线段，每条不是金色就是银色。有没有可能每种颜色最多只有两条？其中至少三条必定有甚么共通之处？

阶段 2 看看另一端

涵盖：six points

停一停，试一试 假设 AB、AC、AD 全是金色。现在看看三角形 BCD。如果它有任何一条边是金色，会怎样？如果一条也没有呢？

阶段 3　五个点并不足够

涵盖：five points

> **想一想**　若只有五个点，每个点只连着四条线段，所以你可以尝试令每个点都是两种颜色各占两条。把这些点排成正五边形（regular pentagon）：各边涂一种颜色，对角线（diagonal）涂另一种颜色。当中有没有单色三角形?

背后的数学

拉姆齐数

拉姆齐数（*Ramsey number*）$R(s,t)$ 是满足以下条件的最小的 N：把 K_N 的边以金、银两色着色，无论怎样着色，都必定包含一个金色的 K_s（即 s 个点，它们之间的所有边都是金色）或一个银色的 K_t。这道题已证明了 $R(3,3)=6$：六个点必定可行，而五边形说明五个点并不可行。

弗兰克·拉姆齐（Frank Ramsey）在 1928 年证明了这些数必定存在：对任意的 s 和 t，总有某个 N 符合要求。证明用的是归纳法（induction），把上面的论证加以推广，并得出 $R(s,t)\le R(s-1,t)+R(s,t-1)$。但要找出确切的数值却异常困难：

$$R(3,3)=6,\qquad R(4,4)=18,\qquad 43\le R(5,5)\le 46.$$

$R(4,4)$ 的值是在 1955 年求得的。尽管已动用电脑作大规模搜索，$R(5,5)$ 至今仍然未知；上界 46 到 2024 年才获证明。电脑无法直接检查 K_{43} 的每一种着色：一共有 2^{903} 种，远远多于宇宙中原子的数目。

艾狄胥与外星人

保罗·艾狄胥（Paul Erdős）对拉姆齐理论（Ramsey theory）发展的贡献无人能及，他很喜欢讲这个故事。假设外星人入侵地球，并威胁说除非我们告诉他们 $R(5,5)$ 的值，否则就毁灭地球。我们应当调动所有电脑和数学家，这样或许能把它找出来。但假如他们问

的是 $R(6,6)$，我们就应该设法消灭外星人。艾狄胥还在 1947 年证明了 $R(k,k) > 2^{k/2}$，所用的方法令人惊叹：他证明了，在少于 $2^{k/2}$ 个点上随机着色的图，有正的概率不包含任何单色的 K_k，所以好的着色必定存在，尽管没有人知道怎样把它构造出来。这种概率方法（*probabilistic method*）如今是组合数学中最强大的工具之一。

乱中有序

拉姆齐定理有很多近亲，它们表达的都是同一个想法：足够大的结构无法避开秩序。范德瓦尔登定理（*Van der Waerden's theorem*）说，如果把所有整数以有限种颜色着色，就存在任意长的单色等差数列（arithmetic progression）。艾狄胥—塞凯赖什定理（*Erdős–Szekeres theorem*）说，任何由 n^2+1 个相异的数组成的数列，都包含一个长度为 $n+1$ 的递增或递减子数列（subsequence）。而拉姆齐本人感兴趣的是一个逻辑问题：他是在一篇关于判定逻辑命题真假的论文中，把这条定理作为引理（lemma）来证明的。

延伸练习

1 **至少两个。**证明在 K_6 的任何双色着色中，其实至少有两个单色三角形。（提示：数一数“双色角”的数目，即在同一个顶点上的一对不同颜色的边。若一个点有 g 条金色的边和 $5-g$ 条银色的边，它就是 $g(5-g) \le 6$ 个这样的角的顶点。每个非单色的三角形恰好包含两个这样的角。）

2 **三种颜色。**如果把 K_{17} 的边以三种颜色着色，证明其中有一个单色三角形。（提示：有一个点至少有六条同色的边。）

3 **三或四。**证明 $R(3,4) \le 10$：在 K_{10} 的任何金、银着色中，都有一个金色三角形或一个银色的 K_4。（提示：一个点要么至少有 4 条金色的边，要么至少有 6 条银色的边。）事实上 $R(3,4) = 9$。

4 **单调子数列。**就 $n=2$ 的情形证明艾狄胥–塞凯赖什定理：任何由 5 个相异的数组成的数列，都包含一个长度为 3 的递增或递减子数列。找出一个由 4 个数组成、两者皆无的数列。

延伸阅读

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific），组合数学入门书，可读其中关于鸽巢原理和拉姆齐理论的章节。
- **Ronald Graham & Joel Spencer, “Ramsey theory”**，*Scientific American*（1990 年 7 月）。

由两位顶尖研究者撰写的科普介绍。

- **Noga Alon & Joel Spencer, *The Probabilistic Method***（Wiley）。讲述艾狄胥这套方法的标准著作；第一章不难读懂。
- **Paul Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers***（Fourth Estate）。艾狄胥的传记。

完整的引导式解答见第 9.2 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/ramsey.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com