9.13 做了手脚的骰子

工作纸

题目

STEP I 1999，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q12

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 对于 $x > 0$，你会怎样证明 $x + \frac{1}{x} \geq 2$？等号何时成立？

阶段 1 两端的点数和

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想** 用 q_i 和 r_j 表示点数和为 2 及 12 的概率（probability）。假设全部十一个点数和的概率都是 $\frac{1}{11}$：你会得到哪些方程？

阶段 2 居中的点数和

涵盖：第 (i) 部分

> **停一停，试一试** 在凑成 7 的各种方法之中，有两种只用到 1 和 6 这两个面。写出它们的概率，再利用你的方程代换 q_1 和 q_6。哪里可以用上 $x + \frac{1}{x} \geq 2$?

阶段 3 同一颗骰子掷两次

涵盖：第 (ii) 部分

> **想一想** 两次掷出相同点数的概率是 $q_1^2 + \cdots + q_6^2$。已知各 q_j 之和为 1，这个概率最小可以是多少？试试写成 $q_j = \frac{1}{6} + e_j$。

背后的数学

用多项式来证明

以下是一个完全不同的证明，用的是 Section 9.6 的生成函数（generating function）。设 $Q(x) = q_1 x + \cdots + q_6 x^6$ 及 $R(x) = r_1 x + \cdots + r_6 x^6$。假如所有总和的概率都是 $\frac{1}{11}$，则

$$Q(x)R(x) = \frac{x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}}{11} = \frac{x^2}{11}(1 + x + \cdots + x^{10}).$$

现在 $Q(x)/x$ 是一个 5 次实系数多项式（polynomial），而每个奇数次的实多项式都有一个实根（它的图像由 $-\infty$ 走到 $+\infty$，或者反过来）。所以左边有一个非零的实根。但 $1+x+\cdots+x^{10}=\frac{x^{11}-1}{x-1}$，它的根是 1 以外的 11 次单位根（roots of unity），当中没有一个是实数。矛盾。同样的论证表明，只要 $n-1$ 是奇数，即 n 是偶数，无论怎样在两颗 n 面骰子上做手脚，都不能令各个总和等可能。（当 n 是奇数时，多项式的论证需要多花些工夫，但上面的算术平均—几何平均证明对每个 $n \geq 2$ 都适用。）

碰撞概率

第 (ii) 部分中的量 $\sum q_j^2$，即两次独立抽取结果相同的机会，称为一个分布的*碰撞概率*（collision probability）。第 (ii) 部分表明，均匀分布（uniform distribution）的碰撞概率最小。它量度一个分布有多集中：在生态学中，$\sum q_j^2$ 是辛普森多样性指数（Simpson's index of diversity），其中 q_j 是物种 j 在某个生境中所占的比例；在经济学中，它是量度市场集中度的赫芬达尔指数（Herfindahl index）；在密码学中，它量度一个密码分布有多容易被猜中。它也解释了 Section 9.9 结尾的那句话：各个生日的概率不相等，只会令生日相同的情况更有可能出现。

不可能性的证明

数学中一些最著名的结果，说的正是某件事办不到：没有分数的平方等于 2；没有尺规作图法能三等分任意角；没有根式公式能解所有五次方程；没有算法能判定每一个数学命题。每一个这样的结果都改变了所属的学科，因为要证明*没有*任何方法行得通，就必须了解所有方法构成的整个空间。灌铅骰子问题是一个缩影：要排除每一种做手脚的方式，我们需要一个每种方式都必须遵守的不变性质（算术平均—几何平均不等式）。

延伸练习

1 **柯西—施瓦兹不等式。**利用柯西—施瓦兹不等式 $\left(\sum a_j b_j\right)^2 \leq \sum a_j^2 \sum b_j^2$，取 $a_j = q_j$ 及 $b_j = 1$，为第 (ii) 部分给出一行的证明。

2 **两颗不同的骰子。**如果把两颗*不同*的灌铅骰子各掷一次，它们点数相同的概率能否小于 $\frac{1}{6}$？能否等于 0？

3 **面上数字不同时的均匀总和。**证明如果两颗骰子各面的数字另作安排，它们*可以*给出等可能的总和：试取一颗骰子的数字为 $0,1,2,3,4,5$，另一颗为 $0,6,12,18,24,30$。会出现哪些总和？为甚么这与题目并不矛盾？

4 **三颗骰子。**三颗各面为 1 至 6 的六面灌铅骰子，能否令 3 至 18 的所有总和等可能？（提示：利用总和 3、8、13 和 18，以及六个数的算术平均—几何平均不等式。为甚么多

项式证明这次行不通?）

延伸阅读

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。一本出色的不等式入门书，由算术平均—几何平均不等式讲起。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。讲述生成函数，以及它们在上述这类证明中的应用。
- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press），开首数章。最著名的不可能性证明：五次方程。

完整的引导式解答见第 9.13 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/loaded-dice.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com