9.10 总能找赎

工作纸

题目

STEP I 2011，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s1-q12

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停*，*试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　每位拿 £1 的顾客会给你一枚硬币；每位拿 £2 的顾客会取走一枚（作为找赎）。你甚么时候会无法继续？

阶段 1　一枚 £2 硬币

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　只有一位顾客持 £2 硬币时，你在甚么情况下会无法找赎？这位顾客排在队伍（queue）最前的概率是多少？

阶段 2 两枚 £2 硬币

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试 第一个人必须持 £1 硬币。然后按第二个人的情况分类讨论。如果是 £1 硬币，你此后是否已经安全？如果是 £2 硬币，你回到了哪一种情况，能否运用第 (i) 部分的结果？

阶段 3 把队伍看成路径

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 逐一分情况讨论的方法对 $n = 3$ 仍然可行，但过程冗长。不妨改为画图：以你手上 £1 硬币的数目对已服务的人数作图。一条成功的队伍看起来是怎样的？

阶段 4　反射

涵盖：第 (iii) 部分

> **停一停，试一试**　取一条坏路径（path），即到达高度 -1 的路径。把它首次到达 -1 之前的部分沿直线 $y=-1$ 作反射（reflection）。新路径的起点和终点在哪里？数出这两点之间所有路径的数目。

背后的数学

卡塔兰数

当 $m=n$（£1 硬币刚好足够）时，成功队伍的数目是

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

即第 n 个卡塔兰数 C_n：$1,1,2,5,14,42,132,\ldots$。Richard Stanley 的著作 *Catalan Numbers* 列出了超过二百种由卡塔兰数计算数目的事物。其中包括：把 n 对括号正确排列的方法数目（“(())()”是允许的，“())(()”则不允许，理由正是上述的硬币论证，只要把“(”看成 £1、“)”看成 £2）、用互不相交的对角线把一个 $n+2$ 边形分割成三角形的方法数目，以及为 $n+1$ 个因子的乘积加上括号的方法数目。

随机游走

队伍就是随机游走（random walk），而反射原理是研究随机游走的基本工具之一。举例说，它可以证明由 0 出发的公平随机游走必定终会返回 0，也可以证明它在最初 $2n$ 步一直保持严格为正的概率是 $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}2^{-2n}\approx\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$。在连续的形式下，把同样的反射论证应用于布朗运动（Brownian motion），便可得出其最大值的分布（distribution）。这是某些金融期权定价的基础，这类期权的回报取决于股价有否越过某个界限。

伯特兰投票问题

1887 年，约瑟夫·伯特兰（Joseph Bertrand）提出：在一场选举中，候选人 A 得 a 票，B 得 $b < a$ 票，那么 A 在整个点票过程中一直严格领先的概率是多少？答案是 $\frac{a-b}{a+b}$，同年由 Désiré André 证明，他的论证通常被视为反射原理（不过历史学家指出，André 实际的证明用的是一个稍有不同的双射）。我们的抽奖券问题是一个容许平手的变体：成功的意思是 £1 的数目从不低于 £2 的数目。其中一道练习会由我们的答案推导出伯特兰的答案。

延伸练习

1 **分情况处理三枚。**仿照第 (ii) 部分，以队伍中最初几个人为条件来证明第 (iii) 部分，看看反射原理省却了多少工夫。

2 **伯特兰投票问题。**在一场选举中，A 得 a 票，B 得 $b < a$ 票。证明 A 在整个点票过程中一直严格领先的概率是 $\frac{a-b}{a+b}$。（提示：第一票必须投给 A；此后，A 落后于 B 的票数绝不可多于…。）

3 **括号。**列出三对括号的 5 种正确排列，以及把五边形分割成三角形的 5 种方法。你能找出两者之间的一个双射吗？

4 **一张 £5 纸币。**一条队伍中有 m 个人拿着 £1 硬币，n 个人拿着 £5 纸币，而一张票的价钱是 £1。解释为何反射原理不再给出简单的答案。（这个推广困难得多。）

延伸阅读

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley），第 III 章。有关随机游走和反射原理的经典论述。
- **Richard Stanley, *Catalan Numbers***（Cambridge University Press）。超过二百种诠释，并附练习。
- **Marc Renault, "Lost (and found) in translation: André's actual method and its application to the generalized ballot problem"**，*American Mathematical Monthly* 115 (2008)。反射原理的历史。

完整的引导式解答见第 9.10 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/ballot.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com