9.1 直线分割平面

工作纸

题目

STEP II 1990，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s2-q4

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **停一停，试一试** 仔细画出 $n = 1, 2, 3, 4$ 的情况，并保持各直线处于一般位置（general position）（没有两条平行，没有三条共点）。数一数每种情况中线段和区域的数目。你能猜出当中的规律吗？

阶段 1　数算线段

涵盖：线段的数目

> **停一停，试一试** 每次只看一条直线。其余的直线中有多少条与它相交？交点共有多少个不同的位置？这些交点把它分成多少段？然后乘以直线的数目。

阶段 2 加上一条直线会怎样?

涵盖：区域的数目

想一想 先画 $n-1$ 条直线，再加上第 n 条。它被其余的直线分成 n 条线段。每条线段会对它所穿过的区域造成甚么影响?

阶段 3　求解递归关系

涵盖：区域的数目、公式

想一想　你应该得到 $R(n) = R(n-1) + n$。由 $R(0) = 1$（或 $R(1) = 2$）开始逐项相加，或以数学归纳法（induction）证明该公式。

背后的数学

乔装的欧拉公式

以下是第二个证明，它不仅推导出答案，更解释了答案从何而来。把这些直线组成的图形看成一幅地图：交点是顶点（vertices），线段是边（edges），区域是面（faces）。图中有 $V = \binom{n}{2}$ 个顶点（每一对直线对应一个）和 $E = n^2$ 条边。无限长的线段只有一个端点，所以我们额外加上一个“在无穷远处”的顶点，让它们全部在那里相遇；这样，整幅图就成为画在球面上的地图（想像把平面包在一个球上，无穷远点位于球顶）。由 Section 7.9 的欧拉公式 $V - E + F = 2$ 可得

$$\left(\binom{n}{2} + 1\right) - n^2 + F = 2, \qquad \text{所以} \qquad F = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

同一个数，却来自完全不同的方向。这些区域还可以整齐地分成两类：其中 $2n$ 个是无界的（每两条相邻的无限射线之间有一个），其余 $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2) - 2n = \binom{n-1}{2}$ 个是有界的。

二项式系数与高维空间

这条公式可以写成

$$R(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2},$$

而这并非巧合。把图形转动，使得没有一条直线是水平的。一个下方有界的区域必有一个最低点，而这个点必定是交点；每个交点又恰好是一个区域（即它正上方的那个）的最低点：这样就得到 $\binom{n}{2}$ 个区域，每一对直线对应一个。其余每个区域都向下无限延伸，因而会与一条画在所有交点下方很远处的水平线相遇；那 n 条直线把这条水平线切成 $n + 1$

个区间，每个这样的区域内各有一个。合共 $\binom{n}{2}+n+1$ 个。在三维空间中，n 个处于一般位置的平面把空间切成

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

块（即*蛋糕数*（cake numbers）$1,2,4,8,15,26,\ldots$），而这个规律在任何维数都成立。证明用的是同一个归纳法：新加的平面被其余平面切成若干区域，其排列方式就如平面上的直线所分成的区域，而每个这样的区域都把一块空间一分为二。

施泰纳与超平面排列

直线和平面所分割出的区域数目的公式，是施泰纳（Jakob Steiner）在 1826 年发现的。今天，它是*超平面排列*（hyperplane arrangements）理论的起点；这套理论计数任意一组直线、平面及其高维类比所形成的区域数目，包括并非处于一般位置的情况。Thomas Zaslavsky 在 1975 年证明了一条非凡的定理：利用一个记录了哪些超平面相交的多项式，就可以数出任何排列的区域数目。同样的想法也出现在机器学习之中：由“ReLU”单元构成的神经网络，会用超平面把输入空间切成多个区域，而区域的数目正好衡量它所能表示的函数有多复杂。

延伸练习

1 **圆。**证明：若 n 个圆中每两个都交于两点，且没有三个圆共点，则它们把平面分成 n^2-n+2 个区域。

2 **平行线。**若 n 条直线中有 k 条互相平行（其余方面均处于一般位置），共有多少个区域？

3 **蛋糕数。**用归纳法证明：n 个处于一般位置的平面把空间分成 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 个区域。

4 **会失效的规律。**在圆周上取 n 个点，并把每一对点用弦连起来，其中没有三条弦在圆内交于同一点。当 $n=1,2,3,4,5$ 时，分别得到 $1,2,4,8,16$ 个区域。数一数 $n=6$ 时的区域数目。（*提示*：使用欧拉公式；每四个点给出一个交点。）证明区域的数目是 $1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$。

延伸阅读

- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley），第 1 章。开首讨论的正是这个问题，还有“薄饼”和“之字形”的变化题。

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific）。一本平易近人的入门教材，设有归纳法、图和欧拉公式等章节。
- **Richard Guy, "The strong law of small numbers"**，*American Mathematical Monthly* 95 (1988)。收录了许多看似明显、其实不成立的规律，包括练习中的圆问题。

完整的引导式解答见第 9.1 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/lazy-caterer.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com