8.8 周期三蕴含混沌

工作纸

题目

STEP III 2025，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　$y = 7 - 2|x|$ 的图像是甚么样子的？它在哪里与直线 $y = x$ 相交？它把区间 $[-7, 7]$ 送到哪里？

阶段 1　$\mathrm{f} \circ \mathrm{f}$ 的图像

涵盖：第 (i)(a) 部分

> **想一想**　当 x 由 -7 走到 0 时，$\mathrm{f}(x)$ 会取遍整个 $[-7, 7]$。那么 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 在这个区间（interval）上会怎样变化？由 0 到 7 又如何？

阶段 2 **解** $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$

涵盖：第 (i)(b) 及 (c) 部分

想一想 其中两个解是 f 的不动点（fixed point）。为甚么它们也满足 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$?

停一停，试一试 对于任何其他解 p，设 $q = \mathrm{f}(p)$，则 $\mathrm{f}(q) = p$。p 和 q 可以同号吗？如果不可以，试写出关于 p 和 q 的两条线性方程（linear equation）并求解。检查在 $[-7, 7]$ 之外没有解。

阶段 3　迟一步才进入循环（cycle）

涵盖：第 (i)(d) 部分

想一想　由 $a = \frac{28}{5}$ 出发，计算数列的首几项。它在甚么时候进入 2-循环？

阶段 4 三循环

涵盖：第 (ii)(a) 及 (b) 部分

想一想 计算由 $a = 1$ 和 $a = -\frac{7}{9}$ 出发的数列。

停一停，试一试 在 $[-7, 7]$ 上，$\mathrm{f} \circ \mathrm{f} \circ \mathrm{f}$ 的图像由多少段直线组成？每一段最多可以与 $y = x$ 相交多少次？数一数你已经知道的解。

阶段 5　迟一步才进入 3-循环

涵盖：第 (ii)(c) 部分

> **停一停，试一试**　仿照第 (i)(d) 部分的做法，由循环 $1 \to 5 \to -3$ 倒推回去。f 会把哪些数映射到 1？选取不在循环内的那一个，然后继续往回推。

背后的数学

任何长度的循环

第 4 阶段的计数方法适用于任何步数。把 f^n 记作施行 f 共 n 次。在 $[-7,7]$ 上，f^n 的图像有 2^n 段直线段，每段都走遍整个高度，所以 $f^n(x) = x$ 恰好有 2^n 个解。其中有些解的周期较短，是某个整除 n 的 d，但对每个 d 而言，这样的解最多只有 2^d 个，而且

$$2^n > 2^{n/2} + 2^{n/3} + \cdots + 2^1 \quad \text{（对所有满足 } d < n \text{ 的 } n \text{ 的因数求和）}$$

因为所有小于 n 的因数都不超过 $n/2$，而 $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} < 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \le 2^n$。所以对每个 n，都存在周期恰好为 n 的点。这个函数有任何长度的循环。

为甚么周期三迫使一切出现

李天岩与约克的定理指出，这并非我们这个函数独有的性质：*任何*由区间映到自身的连续函数 g，只要有一个 3-循环，就有任何长度的循环。证明所用的不外乎介值定理（intermediate value theorem），而我们的 3-循环正好展示了证明的思路。

> **想一想**　设 $I_1 = [-3,1]$ 及 $I_2 = [1,5]$，即循环 $1 \to 5 \to -3$ 各点之间的两个区间。f 把它们分别送到哪里？

在 I_2 上，f 由 $f(1) = 5$ 递减至 $f(5) = -3$，所以 $f(I_2) = [-3,5] = I_1 \cup I_2$。在 I_1 上，f 由 $f(-3) = 1$ 升至 $f(0) = 7$，再降至 $f(1) = 5$，所以 $f(I_1) = [1,7]$，它包含 I_2。留意我们只用到循环的三个点：任何具有 3-循环 $a \to b \to c$、$a < b < c$ 的连续函数，都以同样的方

式覆盖它的区间。我们可以用一幅图来概括哪个区间覆盖哪个区间（图 8.8.3）：

$$I_1 \to I_2, \qquad I_2 \to I_1, \qquad I_2 \to I_2.$$

定理于是由以下两个事实推出，两者都是介值定理的推论。

- 如果 $g(I) \supseteq I$，则 g 在 I 内有一个不动点。（对 $g(x) - x$ 应用介值定理。）
- 如果 $g(I) \supseteq J$，则存在一个较小的闭区间 $I' \subseteq I$，使得 $g(I') = J$ 恰好成立。

要找一个周期为 n 的点，可沿着图中的回路 $I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2 \to I_1 \to I_2$ 走：$n-1$ 步留在 I_2 之内，另有一步走出去到 I_1 再回来。反复运用第二个事实，我们可以把 I_2 收窄成一个由起始点组成的区间，这些起始点的轨道（orbit）都依循这条路线，而 g^n 把这个区间映满整个 I_2。第一个事实给出一点 x，满足 $g^n(x) = x$，并且只在第 $n-1$ 步到访 I_1。它的周期不可能小于 n，否则对 I_1 的到访便会在更早的时候重复出现。（这里有一个微妙之处，因为 I_1 和 I_2 共有一点 1；验证这不会造成问题，留作习题。）

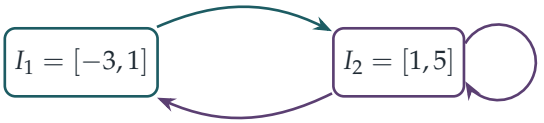


图 8.8.3 3-循环的覆盖图（covering diagram）。由一个区间指向另一个区间的箭嘴，表示前者的像包含后者。图中每一条回路都给出函数的一个循环：回路 $I_2 \to I_2$ 给出一个不动点，$I_1 \to I_2 \to I_1$ 给出一个 2-循环，而先绕 I_2 处的回路 $n-1$ 次再到访 I_1，则给出一个长度为 n 的循环。

沙可夫斯基定理

李天岩与约克并不是最先发现的人。早在 1964 年，乌克兰数学家沙可夫斯基（Oleksandr Sharkovskii）已经证明了一个完备得多的结果，以俄文发表于《乌克兰数学杂志》（*Ukrainian Mathematical Journal*），其后十年间西方对此一无所知。把正整数排列成

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ \ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ \ldots,\ \ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ \ldots,\ \ \ldots,\ \ 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1:$$

先是由 3 开始的奇数，然后是奇数的两倍，再然后是奇数的四倍，如此类推，最后以 2 的幂按递减次序作结。沙可夫斯基定理指出：如果区间上的一个连续函数有一个长度为 m 的循环，那么凡是在这个列表中排在 m 之后的长度，它都有相应的循环。由于 3 排在最前，周期 3 便蕴涵所有周期。而且这个定理是最佳的：对每个 m，都存在一个函数，它有长度为 m 的循环，却没有列表中排在更前的长度的循环。列表末端 2 的幂，正正就是 Section 8.7 中逻辑斯蒂映射（logistic map）的倍周期级联（period-doubling cascade），而 3-循环在那里出现于 $k = 1 + \sqrt{8}$。

帐篷映射与逻辑斯蒂映射

作代换 $x = 14y - 7$，它把 $[0,1]$ 映满 $[-7,7]$。简单计算可见，f 变成了帐篷映射（tent map）

$$T(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le \tfrac{1}{2}, \\ 2 - 2y & \tfrac{1}{2} \le y \le 1, \end{cases}$$

而再作代换 $u = \sin^2(\pi y/2)$，就把帐篷映射变成逻辑斯蒂映射 $u \mapsto 4u(1-u)$。所以这道题目中的函数，其实就是 Section 8.7 中那个混沌的逻辑斯蒂映射，只是被拉直了。它的 $f^3(x) = x$ 的八个解，对应于 $\sin^2(8\theta) = \sin^2\theta$ 在 $[0, \tfrac{\pi}{2}]$ 内的八个解。

延伸练习

1 **一个 4-循环。**利用覆盖图预测 f 的一个 4-循环应该在哪里（三步在 I_2，一步在 I_1）。然后把它精确地求出来。（提示：这个循环有三个正的点和一个负的点；写下四条线性方程。）

2 **微妙之处。**在“周期 3 蕴涵周期 n”的证明中，解释为甚么当 $n \ge 4$ 时，所找到的点 x 不可能是点 1（或原来那个 3-循环的任何一点）。

3 **有周期 5 而没有周期 3。**草绘一个在 $[1,5]$ 上的连续函数的图像，它满足 $g(1) = 3$、$g(3) = 4$、$g(4) = 2$、$g(2) = 5$、$g(5) = 1$，并以直线连接这些点。就区间 $[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$、$[4,5]$ 画出它的覆盖图。你能找到一条长度为 3 的回路吗？（沙可夫斯基定理说它没有 3-循环。）

4 **帐篷映射。**验证 $x = 14y - 7$ 把 f 变成帐篷映射。然后证明帐篷映射把以二进制写成的 y 加倍，并且每当首位数字是 1 时就把所有数字反转；再利用这一点找出它的 3-循环。

延伸阅读

- **Tien-Yien Li & James Yorke, “Period three implies chaos”**, *American Mathematical Monthly* 82 (1975)。篇幅短小，懂得介值定理便可读懂。
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*** (CRC Press)。为大学本科生而写；涵盖帐篷映射、逻辑斯蒂映射和沙可夫斯基定理，并附完整证明。
- **Keith Burns & Boris Hasselblatt, “The Sharkovsky theorem: a natural direct proof”**, *American Mathematical Monthly* 118 (2011)。一个运用覆盖图的现代证明。

完整的引导式解答见第 8.8 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/period-three.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com