8.7 可以解出的混沌

工作纸

题目

STEP I 2014，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s1-q6

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　你以前在哪里见过 $4s(1-s)$ 这个式子，其中 $s=\sin^2\theta$？哪一条恒等式把 $\sin^2\theta$、$\cos^2\theta$ 和 $\sin 2\theta$ 联系起来？

阶段 1　猜出规律

涵盖：第 (i) 部分：猜想

> **想一想**　已知 $u_0=\sin^2\theta$，那么 $1-u_0$ 是甚么？利用二倍角公式（double-angle formula）把 u_1 写成单一个平方，然后对 u_2 照做一次。

阶段 2 证明猜想

涵盖：第 (i) 部分：证明

想一想 对 n 用归纳法（induction）证明你的猜想。归纳步骤的计算与求 u_1 时完全相同，只是把 θ 换成 $2^n\theta$。

阶段 3 变量代换

涵盖：第 (ii) 部分：p、q、r 须满足的条件

停一停，试一试 把 $v_n = \alpha u_n + \beta$ 代入 v_{n+1} 的递推式，再整理成 u_{n+1} 的表达式。与 $4u_n - 4u_n^2$ 比较：你得到多少条方程？有多少个未知数？多出来的那条方程就是所求的条件。

阶段 4 例子

涵盖：第 (ii) 部分：例子

想一想 读出 p、q、r 的值，并验证条件成立。求出 α 和 β，以及初始值 u_0。哪一个角 θ 满足 $\sin^2\theta = u_0$?

背后的数学

数列为何无法预测

公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ 看来已是故事的结局：任何一项都可以直接算出。但请细看它说了甚么。由于 $\sin^2$ 的周期（period）是 π，所以只有 $2^n\theta$ 模（modulo）π 的值才有影响。设 $\theta = \pi x$，其中 $0 \le x < 1$，并把 x 写成二进制（binary）：

$$x = 0.b_1b_2b_3\ldots \quad (\text{底为}2).$$

乘以 2 会把二进制小数点向右移一位，而把结果取模 1，就是丢掉越过小数点的那个数位。所以 u_n 只取决于 x 由 b_{n+1} 起的二进制数位。逻辑斯谛映射每走一步，就多读取初始值的一个数位，同时丢掉最前面的一个。

这就是*对初始条件的敏感依赖*（sensitive dependence on initial conditions），也是混沌的决定性特征。两个初始值若在首 20 个二进制位上相同（约六个小数位），它们产生的数列一般会在大约 20 步之内吻合，其后便毫无关系（图 8.7.1）。要预测 u_{100}，你需要知道 u_0 准确至 100 个二进制位。初始角度的任何误差，无论多小，每一步都会加倍。（种群数量 u 本身的误差并非每次都以完全相同的倍数增长，因为这个映射对 $[0,1]$ 某些部分的拉伸比其他部分大，但平均而言，它的增长率是一样的。）公式帮不上忙：它只是令这个机制显现出来。

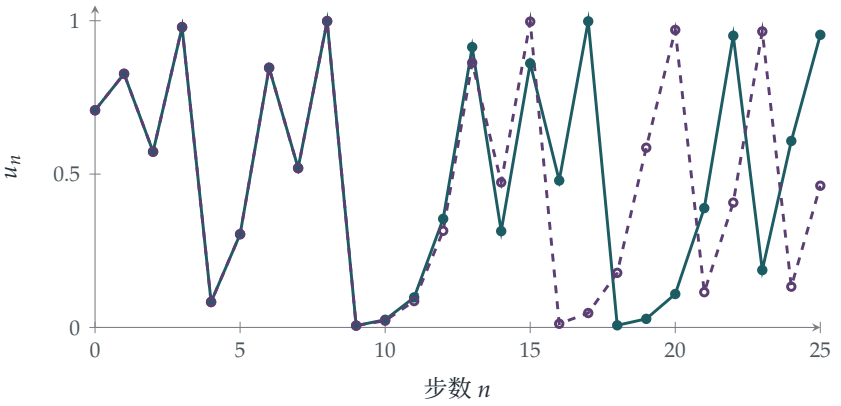


图 8.7.1 $k = 4$ 的逻辑斯谛映射的两个数列，分别由 $\sin^2(1)$（蓝绿色）和 $\sin^2(1.00001)$（紫红色虚线）开始。在大约头十步内两者无法分辨，到第 12 步已有明显差别，其后便毫无关系：到第 12 步，角度之差 10^{-5} 已经加倍了十二次，变成约 $2^{12} \times 10^{-5} \approx 0.04$。

周期点无处不在

这个公式还能找出映射的每一个循环（cycle）。数列在 N 步之后回到初始值，当且仅当 $\sin^2(2^N\theta) = \sin^2\theta$，即 $2^N\theta \equiv \pm\theta \pmod{\pi}$。所以 $\theta = m\pi/(2^N - 1)$ 或 $\theta = m\pi/(2^N + 1)$ 给出一个周期整除 N 的点。例如 $\theta = \pi/5$ 满足 $4\theta \equiv -\theta$，所以 $\sin^2\frac{\pi}{5} \to \sin^2\frac{2\pi}{5} \to \sin^2\frac{4\pi}{5} = \sin^2\frac{\pi}{5}$ 是一个 2-循环。每一个周期都有对应的周期点（periodic point），而且它们在 $[0,1]$ 中稠密（dense）：在每一个区间内，无论多小，都有一个初始值使数列重复出现。然而每一个周期点都是不稳定的，因为任何误差都会加倍。稠密的周期点，却把附近的一切都推开，这是混沌的第二个标志。

通往混沌之路

对于较小的 k，并没有公式可用，而数列的行为会随 k 剧烈变化（图 8.7.2）。当 $1 < k < 3$ 时，每一个由 $(0,1)$ 内出发的数列都会趋于不动点（fixed point）$1 - 1/k$。在 $k = 3$ 时，不动点变得不稳定，由一个 2-循环取而代之（这是 STEP II 2002 Q5 的主题；见延伸练习）。在 $k = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ 时，2-循环让位予 4-循环，然后是 8-循环，周期加倍来得愈来愈快，直至 $k \approx 3.5699$ 时，循环的长度变成无限，混沌由此开始。在混沌区域之内还有一些有序的窗口：最明显的一个在 $k = 3.83$ 附近，其中有一个 3-循环，那是 Section 8.8 的主题。

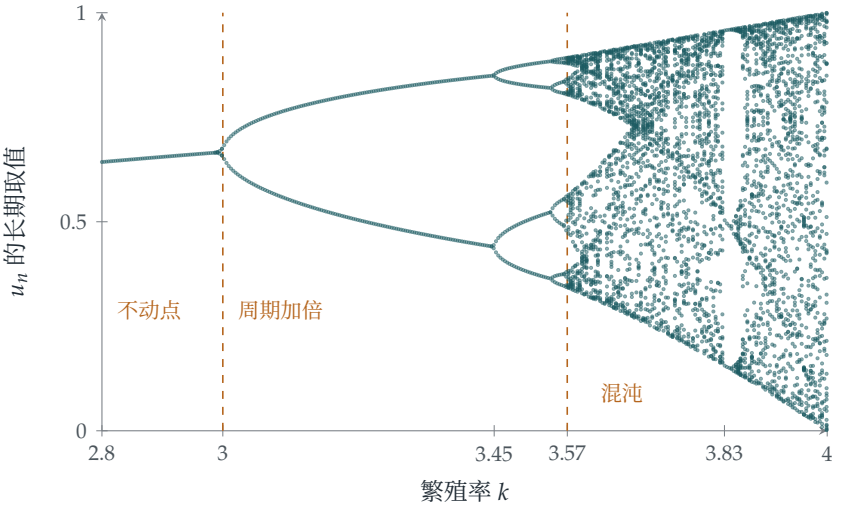


图 8.7.2　逻辑斯谛映射的分岔图（bifurcation diagram）。对每一个 k，由 $u_0 = 0.31416$ 开始把映射迭代 300 次，然后画出其后的 40 个值。单一个不动点在 $k = 3$ 时分裂成一个 2-循环，然后是 4、8、…，直至在 $k = 3.57$ 附近进入混沌。$k = 3.83$ 附近那道浅色的垂直空隙，就是含有稳定 3-循环的窗口。在 $k = 4$ 时，这些值填满了整个 $[0, 1]$。

费根鲍姆常数

1975 年，费根鲍姆（Mitchell Feigenbaum）在洛斯阿拉莫斯（Los Alamos）工作时，用一部可编程的袖珍计算机，量度了周期加倍时的各个 k 值：$k_1 = 3$、$k_2 \approx 3.4495$、$k_3 \approx 3.5441$、$k_4 \approx 3.5644$、…。他留意到这些间距以一个固定的倍数缩小，

$$\frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \to 4.6692\ldots,$$

然后更令人惊讶地发现，同一个数 4.6692… 也出现在 $x \mapsto k\sin(\pi x)$ 之中，以及其他所有只有单一个峰、而峰顶像抛物线般圆滑（即*二次极大值*，quadratic maximum）的光滑映射之中。这个常数对这一整类映射是*普适*（universal）的；至于峰顶较平坦的映射，例如形状像 $-x^4$ 的那种，则各有自己的普适常数。其后，人们在滴水的水龙头、受热的流体和电子电路的实验中都量度到这个常数。要解释个中原因，需要借用相变（phase transition）物理学的想法，而严格的证明要到 1982 年才由 Oscar Lanford 借助电脑完成。

同一招，用三次

第 (ii) 部分的代换是*共轭*（conjugacy）的一个例子：若一个变量代换能把一个映射变成另一个，这两个映射便称为共轭，而它们的动力学行为完全相同。本题证明了每一个满

足该条件的二次映射，都与 $k = 4$ 的逻辑斯谛映射共轭，而后者又通过 $u = \sin^2\theta$，成为乔装了的角度加倍。（严格来说，最后这一环是半共轭（semiconjugacy）：θ 和 $\pi - \theta$ 给出相同的 u，所以这个变量代换并非一对一（one-to-one）。逻辑斯谛映射真正共轭的对象是帐篷映射（tent map），即当 $t \le \frac{1}{2}$ 时 $t \mapsto 2t$、当 $t \ge \frac{1}{2}$ 时 $t \mapsto 2 - 2t$，所用的代换是 $u = \sin^2\frac{\pi t}{2}$，它在 $[0,1]$ 上是一对一的。）在 Section 2.8 中，你遇过 $x \mapsto x^2 - 2$，它由 $x = 2\cos\theta$ 解出，角度每一步加倍；它同样满足该条件（不妨试试）。所以这些全都是同一个映射的不同乔装。在 Section 8.8 中，这个家族的第三位成员将会登场：一个由直线构成的映射，即帐篷映射。

延伸练习

1 **逻辑斯谛映射的循环。**试做 STEP II 2002，第 5 题（step.maths.org/questions/02-s2-q5）。然后证明只有当 $k > 3$ 时才存在 2-循环。

2 **平方减二。**证明 $v_{n+1} = v_n^2 - 2$ 满足第 (ii) 部分的条件（把它写成 $-pv_n^2 + qv_n + r$，其中 $p = -1$）。求 α 和 β，并验证你的答案与 $v_n = 2\cos(2^n\phi)$ 一致。

3 **一个 3-循环。**利用公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，求 $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$ 的一个 3-循环。（提示：试试 $\theta = \pi/7$，或 $\theta = \pi/9$。）周期恰好为 3 的点有多少个？

4 **丢失数位。**电脑储存数字时，大约准确至 53 个二进制位。如果你在电脑上迭代 $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$，大约多少步之后，计算出来的值便与真正的数列毫无关系？到那时，计算出来的数列是否就没有用处？

延伸阅读

- **Robert May，“Simple mathematical models with very complicated dynamics”**，*Nature* 261 (1976)。经典之作，至今仍然十分易读。
- **James Gleick，*Chaos: Making a New Science***（Penguin）。讲述梅、费根鲍姆以及混沌被发现的故事。
- **Steven Strogatz，*Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press），第 10 章。一维映射、逻辑斯谛映射和费根鲍姆常数，程度相当于大学一年级。
- **Ian Stewart，*Does God Play Dice?***（Penguin）。一本介绍混沌的科普读物，其中有一章对逻辑斯谛映射讲解得很好。

完整的引导式解答见第 8.7 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/solvable-chaos.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com