8.5 格力犬追逐格力犬

工作纸

题目

STEP III 1988，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s3-q10

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　根据对称性，四只狗在每一刻构成甚么形状？它的中心在哪里？

阶段 1　运动方向

涵盖：速度（velocity）与半径之间的夹角

> **想一想**　A 笔直地朝 B 跑去。在三角形 OAB 中，各个角是多少？AB 与 AO 的夹角是多少？

阶段 2 微分方程（differential equation）

涵盖：求解路径

> **停一停，试一试** 把 A 的速度分解为径向（radial）分量 $\dot{r}$ 和横向（transverse）分量 $r\dot{\theta}$。将两者相除得出 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$，然后求解。

阶段 3 n 只狗

涵盖：推广至 n 只狗的情况

> **想一想** 对于正 n 边形，三角形 OAB 中位于 O 的角是多少？两个底角又是多少？以这个角取代 $45°$，重做第二阶段。

背后的数学

无穷多圈，有限距离

径向速率 $\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$ 是常数，所以各只狗在时间 $T = \frac{r_0}{v\sin(\pi/n)}$ 之后到达中心，每只狗跑过的距离是 $vT = \frac{r_0}{\sin(\pi/n)}$。对于边长为 s 的正 n 边形，$r_0 = \frac{s}{2\sin(\pi/n)}$，所以每只狗

跑过的距离是

$$\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}.$$

对于四只狗，这恰好是 s：每只狗跑过的距离正好是一条边的长度。（这里有一个巧妙的看法：B 的速度始终与 AB 垂直，所以它不会改变距离 AB；只有 A 以速率 v 沿着 AB 笔直前进的运动才会缩短两者的距离，而这个距离最初是 s。）对于三只狗，距离是 $\frac{2}{3}s$；对于六只狗，距离是 $2s$。然而在每一种情形下，螺线都绕着中心转无穷多圈，因为当 $r \to 0$ 时 $\theta \to \infty$。一条长度有限却转了无穷多圈的曲线并不是悖论：那些圈缩小得足够快。

对数螺线

曲线 $r = \lambda e^{-k\theta}$ 称为*对数螺线*（logarithmic spiral）或*等角螺线*（equiangular spiral）：它与每一条从中心出发的射线相交的角度都相同。它出现在大自然之中，例如鹦鹉螺的壳和某些星系的旋臂，因为保持形状不变的生长就会产生这种曲线。雅各布·伯努利（Jacob Bernoulli）对它极为着迷，甚至要求把它刻在自己的墓碑上，并附上格言 *Eadem mutata resurgo*（“纵然改变，我仍将依旧复起”），指的是它在任何尺度下看起来都一样。结果石匠刻的却是一条阿基米德螺线（Archimedean spiral）。

实际中的追逐

“纯追逐”（pure pursuit），即始终笔直朝着目标前进，是导弹或捕食者最简单的导引法则。但它并不是最好的：朝着目标*将会*到达的位置前进（“比例导引”，proportional navigation）更有效率，而现代导弹以及某些捕食者（例如蜻蜓和隼）实际上正是这样做的。追逐与逃避的数学在二十世纪自成一门学科，名为*微分博弈*（differential games）。

延伸练习

1. **巧妙的论证。**仔细解释为何在四只狗的问题中，距离 AB 恰好以速率 v 减少，并由此推出四只狗在时间 s/v 之后相遇。

2. **三只狗。**三只狗从边长为 s 的等边三角形的三个角出发。求每条路径的方程、牠们相遇所需的时间，以及每只狗跑过的距离。

3. **转了多少圈？**设四只狗出发时距离中心 100 m，牠们转了完整一圈之后距离中心多近？转了多少个完整的圈之后，牠们与中心的距离在 1 mm 以内？

4. **两只狗。**当 $n = 2$（两只狗面对面）时会怎样？公式是否仍然有意义？

延伸阅读

- **Paul Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion***（Princeton University Press）。关于追逐曲线的一切，从 Bouguer 到导弹。
- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。内容包括对数螺线和伯努利的墓碑。
- **D'Arcy Thompson, *On Growth and Form***（Cambridge University Press）。讲述大自然中的数学的经典著作，包括螺线式的生长。

完整的引导式解答见第 8.5 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/pursuit.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com