8.4 盘旋趋向圆

工作纸

题目

STEP III 2015，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s3-q8

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　两条方程其实都暗藏 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ 和 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ 这两个组合。它们在极坐标中是甚么？

阶段 1 用极坐标（polar coordinates）处理第 (i) 部分

涵盖：第 (i) 部分

想一想 把方程重新整理，使它由 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ 和 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ 两个组合构成。展开来验证一下。

停一停，试一试 把这两个组合分别换成 $r\,\mathrm{d}r$ 和 $r^2\,\mathrm{d}\theta$。你会得到一条怎样的、以 θ 表示 r 的微分方程（differential equation）？把它解出来。

阶段 2 第 (ii) 部分

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 新方程就是原来的方程，再加上一些含有 $x^2 + y^2 = r^2$ 的项。把新增的项归并起来：出现的是两个组合中的哪一个？

停一停，试一试 你应该得到 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^3 - r$。设 $u = r^{-2}$。u 满足哪一条线性方程 (linear equation)？

阶段 3 三类解

涵盖：解的形状

> **想一想** 就 $A = 0$、$A > 0$ 和 $A < 0$ 三种情况，分别考察 $r^2 = \frac{1}{1+Ae^{2\theta}}$。在每种情况下，当 $\theta \to -\infty$ 时以及当 θ 增大时，r 会怎样变化？当 $A < 0$ 时，θ 可以取哪些值？

背后的数学

极限环

庞加莱（Henri Poincaré）在 1880 年代研究平面上微分方程的定性行为时，引入了极限环。不妨把题目中的方程理解为描述一个点在平面上运动的路径。单位圆是一条孤立的闭轨道（closed orbit），附近的每条轨道都会缠绕着向它靠近（或远离它，视乎时间的方向而定）。1926 年，荷兰工程师 Balthasar van der Pol 在一个装有真空管的电路中发现了极限环，并提出类似的方程可以描述心脏的跳动。凡是具有自持而稳定节奏的系统，都可以用极限环作为模型：生理时钟、神经脉冲、捕食者与猎物种群数量的周期。

平面上没有混沌

庞加莱—本迪克松定理（Poincaré–Bendixson theorem）指出，对于平面上的光滑系统，如果一条轨道一直留在某个有界区域内，又不趋近任何平衡点（equilibrium），它就必定趋近一条闭轨道。所以在二维的情况下，长期行为只限于平衡点和环：混沌（chaos）没有容身之处，因为轨道不能相交。混沌至少需要三维，正如洛伦兹（Edward Lorenz）在 1963 年以他那著名的三变量对流模型（“蝴蝶”）所发现的那样。至于离散时间的情况，我们会在 Section 8.7 看到，即使只有一维，混沌也可能出现。

一个未解决的问题

1900 年，希尔伯特（David Hilbert）在他的第十六问题中问道：当 P 和 Q 是 n 次多项式时，系统 $x' = P(x,y)$，$y' = Q(x,y)$ 最多可以有多少个极限环？即使是 $n = 2$ 的情况，答案至今仍然未知：已知有些系统具有四个极限环，但是否可能有更多，则无人知晓。在希尔伯特的问题之中，这是极少数至今仍然完全悬而未决的一个。

延伸练习

1 **螺线。**对于第 (i) 部分的解 $r = e^{-\theta}$，证明曲线与每条由原点出发的射线都以相同的角度 45° 相交。（这就是对数螺线又称为等角螺线（equiangular spiral）的原因。）

2 **极坐标恒等式。**证明 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$ 和 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$。

3 **随时间变化的系统。**考虑系统 $\dot{r} = r(1 - r^2)$，$\dot{\theta} = 1$。证明当 $t \to \infty$ 时，每个满足 $r(0) > 0$ 的解都趋近单位圆。把这个系统以 x 和 y 表示。

4 **两个环。**找出一个形如 $\dot{r} = f(r)$，$\dot{\theta} = 1$ 的系统，使它有两个极限环，分别位于 $r = 1$ 和 $r = 2$，其中一个是吸引的（attracting），另一个是排斥的（repelling）。

延伸阅读

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。第 7 章讲述极限环和庞加莱–本迪克松定理。
- **Steven Strogatz, *Sync***（Hyperion）。一本讲述自然界中的节奏与同步现象的科普读物。
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***（Penguin）。讲述洛伦兹与发现混沌的故事。

完整的引导式解答见第 8.4 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/limit-cycle.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com