8.3 收获种群

工作纸

题目

STEP II 1995，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s2-q8

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　在动手求解之前，先把增长率 $(2K - x)x$ 当作 x 的函数，画出它的略图。它在哪里为零？在哪里为正？这告诉你 x 会怎样变化？

阶段 1 求解逻辑斯谛方程（logistic equation）

涵盖：没有移除时的种群数量

? **想一想** 分离变量（separate the variables），并把 $\frac{1}{(2K-x)x}$ 分解为部分分式（partial fractions）。

? **想一想** 利用 $t=0$ 时 $x=K$ 求出常数。然后整理成 x 的表达式，看看当 $t\to\infty$ 时会怎样。

阶段 2　收获（harvesting）

涵盖：以速率 L 移除

> **想一想**　以速率 L 移除细菌，即是从增长率中减去 L。对 $(2K-x)x-L$ 配方（complete the square），并设 $K^2-L=\alpha^2$。

> **停一停，试一试**　代入 $y=x-K+\alpha$。y 满足甚么方程？$y(0)$ 又是多少？把 K 换成 α，与第一部分比较。

背后的数学

临界点

有收获的方程有两个平衡点，$K+\alpha$ 和 $K-\alpha$。上面的一个是稳定（stable）的：种群数量稍高于或稍低于它，都会回到它那里。下面的一个是不稳定（unstable）的：种群数量只要稍低于 $K-\alpha$，便会一直下跌，直至灭绝。随着收获率 L 增加，$\alpha=\sqrt{K^2-L}$ 会缩小，两个平衡点互相靠近；到 $L=K^2$ 时两者合而为一，而当 $L>K^2$ 时则完全没有平衡点，任何种群都会崩溃（图 8.3.1）。这是一个鞍结分岔（saddle-node bifurcation），是最简单的一种临界点（tipping point）。它的可怕之处，在于事前没有任何明显的预

兆：当 L 接近 K^2 时，平衡种群数量只是缓缓下降，然后平衡点突然不复存在。事后才减少收获未必有用，因为种群数量可能已经跌到不稳定的阈值以下。

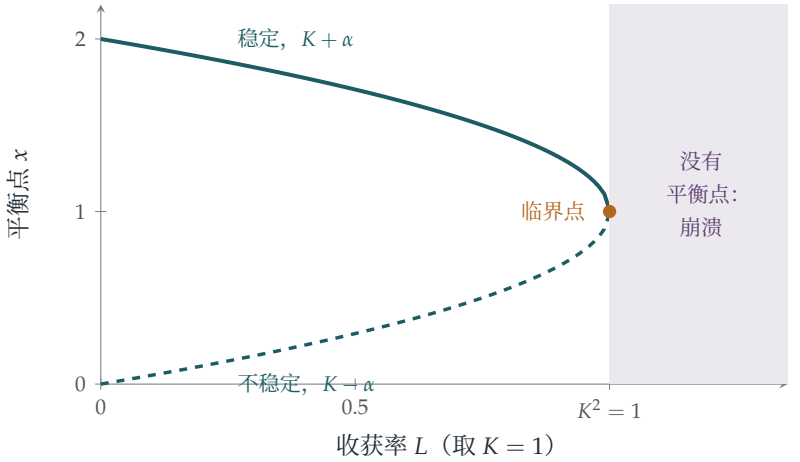

图 8.3.1 平衡种群数量与收获率 L 的关系，其中 $K=1$。随着 L 增加，稳定平衡点（实线）与不稳定阈值（虚线）互相靠近，并在 $L=K^2$ 处相遇。越过这一点之后，平衡点不再存在，无论种群有多大都会崩溃。

最大可持续产量

种群所能承受的最大收获量是多少？答案是 $L=K^2$，即增长率 $(2K-x)x$ 的峰值，在种群数量维持于 K（环境承载力的一半）时达到。二十世纪中叶，渔业科学采纳了这个“最大可持续产量”（maximum sustainable yield）作为管理目标。可是，恰好按最大值收获，就等于把系统恰好放在临界点上，只要稍为高估了 K，或者遇上一个坏年头，便会引致崩溃。纽芬兰对开的大浅滩（Grand Banks）鳕鱼渔场，五百年来一直是全世界最丰饶的渔场之一，却在 1990 年代初崩溃；1992 年，加拿大政府颁布禁捕令，令数以万计的人失去工作。鱼类资源至今仍未完全恢复。

其他地方的逻辑斯谛增长

逻辑斯谛方程由 Pierre-François Verhulst 于 1838 年提出，用来为人类人口建立模型。同一条 S 形曲线，也描述了疫症初期的传播、新科技的普及、自催化化学反应以及肿瘤的生长。它的离散时间版本，即逻辑斯谛映射（logistic map），表现却截然不同：它可以是混沌（chaotic）的，我们会在 Section 8.7 看到。

延伸练习

1 **由低处出发。**在有收获且 $K^2 > L$ 的情况下，证明若 $x(0) < K - \alpha$，则种群数量会在有限时间内降至零。（提示：当 $y(0) < 0$ 时，y 会怎样变化?）

2 **过度收获。**若 $L > K^2$，设 $\beta = \sqrt{L - K^2}$。在 $x(0) = 2K$ 的条件下解 $x' = -(x - K)^2 - \beta^2$，并求种群数量何时降至零。

3 **按比例收获。**假设改为移走种群中某个固定的比例：$x' = (2K - x)x - hx$。求平衡点，并证明对所有 $h < 2K$，种群都能存活。为甚么这个方案较为安全?

4 **半程时间。**在没有收获的情况下，求种群数量达到 $\frac{3}{2}K$ 的时间。

延伸阅读

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。第 3 章讨论分岔，并以这个收获模型作为习题。
- **Nicholas Britton, *Essential Mathematical Biology***（Springer）。为大学本科生而写的种群模型。
- **Mark Kurlansky, *Cod: A Biography of the Fish That Changed the World***（Penguin）。鳕鱼渔业及其崩溃的历史。

完整的引导式解答见第 8.3 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/harvesting.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com