8.2 不求解而估界

工作纸

题目

STEP III 2013，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s3-q7

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　在第 (i) 部分，把 y 看成质点的位置，把 x 看成时间。那么 $y'' = -y^3$ 就是牛顿定律，其中力为 $-y^3$。动能（kinetic energy）和势能（potential energy）分别是甚么？

阶段 1 守恒（Conservation）

涵盖：第 (i) 部分

想一想 利用链式法则（chain rule）把 E 对 x 求导，并抽出因子 $2y'$。对于余下的括号，微分方程（differential equation）告诉了你甚么？

想一想 因此 E 是常数。求出它在 $x = 0$ 时的值。由于 $(y')^2 \geq 0$，这对 y^4 说明了甚么？

阶段 2　耗散（Dissipation）

涵盖：第 (ii) 部分

> **停一停，试一试**　再次把 E 求导，并利用方程代换 $v'' + \sinh v$。当 $x \geq 0$ 时，$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x}$ 的正负号是甚么？比较 $\mathrm{E}(x)$ 与 $\mathrm{E}(0)$，并计算 $\cosh(\ln 3)$。

阶段 3 构造能量

涵盖：第 (iii) 部分

停一停，试一试 试设 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$。求导，然后选取 $F'(w)$，使得可以利用方程代换 w''，最后只余下 $(w')^2$ 的倍数。你需要一个导数（derivative）为 $w\cosh w$ 的函数：试试把 $w\sinh w$ 求导。

想一想 要证明 $5\cosh x - 4\sinh x - 3 \geq 0$，可用 e^x 和 e^{-x} 把它写出来，并找出一个完全平方（perfect square）。然后比较 $\mathrm{E}(x)$ 与 $\mathrm{E}(0)$。$w\sinh w$ 的正负号是甚么？

背后的数学

李雅普诺夫函数

李雅普诺夫在 1892 年的博士论文中研究运动的*稳定性*（stability）：如果一个系统受到轻微扰动而偏离平衡，它会回到平衡，还是愈走愈远？他的“第二方法”是找出一个函数，它在平衡点处取最小值，而且沿着解永不增加；这种函数现在称为*李雅普诺夫函数*（Lyapunov function）。这样，从平衡点附近出发的解就会一直留在平衡点附近。这个方

法的美妙之处，在于它不需要解的公式，只需要微分方程本身，而这正是本题所展示的。现今，从飞机控制系统、电网以至生态系统，各种各样事物的稳定性都是用李雅普诺夫函数来证明的。

物理与工程中的能量

第 (i) 部分是一个非线性振子（nonlinear oscillator）：它像弹簧，但回复力与位移的立方成正比。与简谐振子不同，它的周期取决于振幅（振荡愈大，速度愈快），但能量守恒仍然把它困住。第 (ii) 部分加入了随时间增强的阻尼（damping），能量因而逐渐流失。在工程学中，人们用能量方法来证明结构不会把自己摇散，以及控制系统不会振荡至失控。在偏微分方程（partial differential equation）的理论中，这类“能量估计”是证明解存在而且性质良好的主要工具；有关流体流动方程的问题，包括千禧年大奖难题（Millennium Prize Problems）之一的纳维－斯托克斯（Navier–Stokes）问题，归根究底就是能否找到这样的界。

延伸练习

1. **简谐运动。**对于 $y'' + y = 0$，其中 $y(0) = A$、$y'(0) = 0$，求守恒的能量，并由此推出 $|y| \le A$。用精确解核对。

2. **单摆。**单摆的角度 θ 满足 $\theta'' + \sin\theta = 0$（采用适当的单位）。证明 $(\theta')^2 - 2\cos\theta$ 是常数。若单摆在角度 θ_0 处由静止开始，其中 $|\theta_0| \le \pi$，证明 $|\theta|$ 永不超过 $|\theta_0|$。若 $|\theta_0| > \pi$，哪里会出问题？

3. **阻尼。**对于 $y'' + 2ky' + y = 0$，其中 $k > 0$，证明 $(y')^2 + y^2$ 递减。它是否必定趋向零？

4. **逃逸。**对于 $y'' - y^3 = 0$，其中 $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$，求一个守恒量，并证明它不能给出 y 的界。哪里出了问题？

延伸阅读

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。第 6 章和第 7 章讲述相平面、保守系统和李雅普诺夫函数。
- **D. W. Jordan & P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations***（Oxford University Press）。一本标准的大学本科教科书，载有大量能量方法的例子。
- **Keith Devlin, *The Millennium Problems***（Basic Books）。书中有一篇关于纳维－斯托克

斯问题的浅白介绍。

完整的引导式解答见第 8.2 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/bounding-without-solving.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com