8.1 当解不唯一

工作纸

题目

STEP III 1994，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s3-q4

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　把两边开平方：$y' = \pm 2\sqrt{y}$。试试 $y = (x-c)^2$。它满足这条方程吗？有没有更简单的解？

阶段 1　经过一点的解

涵盖：经过 (a, b^2) 的两个解

> **想一想**　哪些抛物线（parabola）$y = (x-c)^2$ 经过点 (a, b^2)？解出 c。为甚么两个答案不同？

阶段 2 两个点与一个公共解

涵盖：点 $(a_1, 1)$ 和 $(a_2, 1)$

想一想 哪一个解经过原点？它在何处达到高度 1？由此可得 a_1 和 a_2。列出经过每个点的两个解，看看哪一个是它们共有的。

阶段 3 整个曲线族与公切线

涵盖：最后一部分：公切线（common tangent）

停一停，试一试 画出若干条抛物线 $y = (x - c)^2$ 的草图。哪一条直线与每一条抛物线都相切？这条直线本身是否方程的解？

阶段 4　为何重要

涵盖：最后一部分：切线为何相关

> **想一想**　哪些解经过 x 轴上的一点？你能否构造一个解，先沿 x 轴走一段，然后沿一条抛物线离开？它在各段相接之处是否可微（differentiable）？

背后的数学

解在甚么时候是唯一的？

皮卡—林德洛夫定理（Picard–Lindelöf theorem，由皮卡（Émile Picard）和林德洛夫（Ernst Lindelöf）约于 1890–1894 年证明）指出，方程 $y' = F(x, y)$ 连同 $y(x_0) = y_0$ 在 x_0 附近恰好有一个解，条件是 F 对 y 满足利普希茨（Lipschitz）条件：存在常数 L 使得 $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$。粗略地说，当 y 变化时，F 不可以变化得无限快。我们的方程是 $y' = \pm 2\sqrt{y}$，而 $\sqrt{y}$ 在 $y = 0$ 处的斜率是无限大：它在该处不满足利普希茨条件，而那里正是唯一性失效的地方。（皮亚诺（Giuseppe Peano）在 1886 年证明了单凭 F 的连续性（continuity）已能保证解*存在*，但不能保证解唯一。）皮卡–林德洛夫定理的证明用到一个迭代（iteration），它凭借 Section 2.2 的压缩映射原理（contraction mapping principle）而收敛。

漏水的水桶

以下是一个物理例子。一个底部有孔的水桶按照托里拆利定律（Torricelli's law）流干：水的高度 h 满足 $h' = -k\sqrt{h}$。让时间向前走，一切都没有问题：水桶流干，然后一直是空的。但让时间倒流：假如你发现一个空桶，这条方程无法告诉你它是甚么时候流干的。在所有时间都有 $h = 0$ 的解，以及那些直到某一刻仍然盛满、然后才流干的解，全都与“现在是空的”相符。这种非唯一性，正是“关于过去的信息已经失去”这个事实在数学上的投影。

Norton 圆顶

2003 年，哲学家 John Norton 描述了一个无摩擦的圆顶，其形状使得一个恰好放在顶端的球所遵从的牛顿定律，形式为 $r'' = \sqrt{r}$。其中一个解是球永远停在顶端。但还有其他的解：球在顶端停留任意长的时间，然后在没有任何原因的情况下，自发地朝任意方向滚下。这个例子至今仍有争论：古典力学到底是否决定论（deterministic）的？从数学上看，这正是本题所见的那种非唯一性。

延伸练习

1 **两种增长率。**试做 STEP II 2018，第 8 题（step.maths.org/questions/18-s2-q8）。该题用代换法（substitution）解两条增长方程。然后想一想，为甚么 $y = 0$ 也是具有相同初始值的解，而这对唯一性又说明了甚么。

2 **漏水的水桶。**解 $h' = -k\sqrt{h}$，其中 $h(0) = h_0 > 0$。水桶在甚么时候变空？写出两个不同的解，使得对某个 T 有 $h(T) = 0$，并且对所有 $t \geq T$ 有 $h(t) = 0$。

3 **恢复唯一性。**证明 $y' = 2y$ 连同 $y(0) = 0$ 只有 $y = 0$ 这一个解。（提示：考虑 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ye^{-2x})$。）$2y$ 具有甚么性质，是 $2\sqrt{y}$ 所没有的？

4 **立方。**求 $y' = 3y^{2/3}$ 经过原点的所有解。

延伸阅读

- **Morris Hirsch, Stephen Smale & Robert Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos***（Academic Press）。讲述存在性与唯一性，以及本章其余的大部分内容。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。一本经典著作，富于历史掌故；书中讨论了奇解与包络线。
- **John Norton, “The dome: an unexpectedly simple failure of determinism”**, *Philosophy of Science* 75 (2008)。篇幅短小，容易阅读。

完整的引导式解答见第 8.1 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/non-uniqueness.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com