7.9 只有五种柏拉图立体

工作纸

题目

STEP III 1999，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q4

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想 用正方体验证欧拉公式：它有多少个顶点（vertex）、多少条棱（edge）、多少个面（face）？以正方形为底的棱锥体（pyramid）又如何？

想一想 在正多面体中，每个面有 m 条棱，而每条棱是两个面的公共边。由此可得 E 与 F 之间的甚么方程？同样地，E 与 V 之间又有甚么方程？

阶段 1　F 的公式

涵盖：推导 F 的公式

想一想　利用 $mF = 2E$ 和 $nV = 2E$，把 E 和 V 用 F 表示，再代入欧拉公式（Euler's formula），解出 F。

想一想　展开 $4-(n-2)(m-2)$，并与你所得的分母比较。

阶段 2　m 和 n 可以取哪些值？

涵盖：证明只有五种

想一想　m 的最小可能值是多少？n 呢？既然 $F > 0$，h 必须是正还是负？

停一停，试一试　你需要 $(n-2)(m-2) < 4$，而且两个因子都至少为 1。列出所有可能的情况。对每一种情况，求出 h、F、E 和 V，并说出该立体的名称。

背后的数学

欧拉公式与拓扑学

欧拉在 1750 年提出 $V - E + F = 2$，但他的证明有漏洞；这条公式其后经历了一段引人入胜的历史，当中有一次又一次的尝试证明、反例（counterexample）和修补。一个“画框”形的多面体，中间穿了一个正方形的洞，有 $V - E + F = 0$；由两个正方体在一个顶点处相连而成的多面体，则有 $V - E + F = 3$。拉卡托斯（Imre Lakatos）把这段历史写成一本名著 *Proofs and Refutations*（《证明与反驳》），探讨数学概念如何在反例的磨砺下变得精确。最终的答案是：$V - E + F$ 只取决于曲面在拓扑学（topology）那种宽松意义下的*形状*：凡是可以变形成球面的曲面，它等于 2；环面（torus，即冬甩形）是

0；有 g 个洞的曲面则是 $2-2g$。这个数称为欧拉示性数（Euler characteristic），是拓扑学最早的概念之一；拓扑学研究的，就是经拉伸和弯曲后仍然不变的性质。

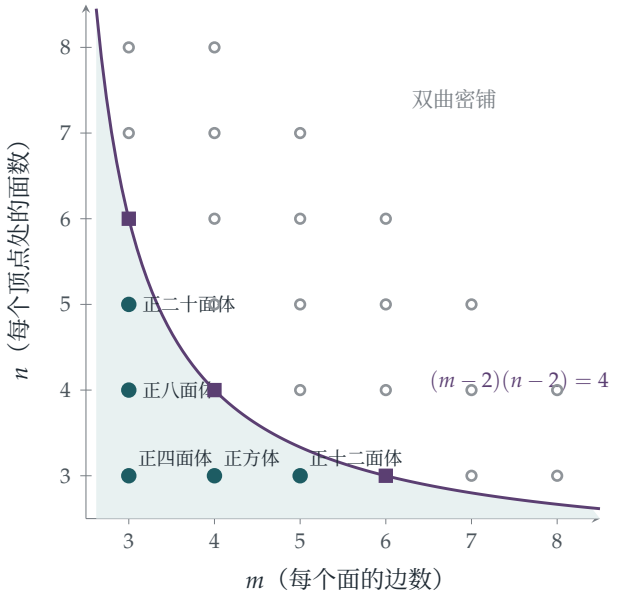

图 7.9.1 满足 $m,n\geq 3$ 的所有可能数对 (m,n)。在曲线 $(m-2)(n-2)=4$ 下方（阴影部分）的是五种柏拉图立体（蓝绿色）。在曲线上的是平面的三种密铺（紫红色方点）：分别用三角形（$m=3$，$n=6$）、正方形（$4,4$）和六边形（$6,3$）。曲线上方的每一点（空心圆圈）都对应双曲平面的一种正则密铺。

球面以外

当 $h=0$ 或 $h<0$ 时又会怎样？当 $(m-2)(n-2)=4$ 时，有三组解：$(3,6)$、$(4,4)$ 和 $(6,3)$，即六个三角形、四个正方形或三个六边形在一点相接，各角之和恰好是 360°。这就是平面的三种正则密铺（regular tiling），也就是浴室地砖和蜂巢的图案。而当 $(m-2)(n-2)>4$ 时，一个顶点处各角之和大于 360°，这在平面上不可能出现，但在 Section 5.8 的双曲平面（hyperbolic plane）上却完全可行。双曲平面有无穷多种正则密铺，图 7.9.1 中曲线上方的每一点各对应一种；艾雪（Escher）的木刻版画 *Circle Limit*（《圆极限》）系列，画的就是其中几种。所以，柏拉图立体的分类其实是一个三分法（trichotomy）的第一种情况，这个三分法（球面、平面、双曲平面）贯穿整个几何学。

对称群

柏拉图立体的对称构成群（group）：正四面体有 12 个旋转，正方体和正八面体有 24 个（两者互为对偶（dual）：把面与顶点互换，$m\leftrightarrow n$），正十二面体和正二十面体则有 60

个。这个阶（order）为 60 的正二十面体群是一个“单”群（simple group）；正如我们在 Section 6.4 提过，正是它令五次方程（quintic）不能用根式（radicals）求解。克莱因（Felix Klein）写了一整本书 *Lectures on the Icosahedron*（《正二十面体讲义》，1884），把正二十面体与五次方程的解法联系起来。

延伸练习

1 **对偶性。**证明把 m 和 n 互换，会令 V 和 F 互换，而 E 保持不变。哪几对柏拉图立体互为对偶？哪一个是自对偶的？

2 **足球。**传统的足球由 12 个五边形和 20 个六边形组成，每个顶点处有三个面相接。利用双重计数和欧拉公式，验证 $V - E + F = 2$。再证明更一般的结果：任何这样由五边形和六边形组成、每个顶点处有三个面相接的多面体，都恰好有 12 个五边形。

3 **环面。**造一个“画框”形的多面体（一个正方形方块，中间有一个正方形的洞），数出 V、E 和 F。验证 $V - E + F = 0$。

4 **顶点处的角。**正 m 边形的内角（interior angle）是 $180^\circ(1 - \frac{2}{m})$。证明 n 个这样的角能围着凸立体的一个顶点拼合（总和小于 360°），当且仅当 $(m-2)(n-2) < 4$，从而得出这个分类的第二个证明。

延伸阅读

- **David Richeson, *Euler's Gem***（Princeton University Press）。讲述 $V - E + F = 2$ 的历史，以及它如何引出拓扑学。非常适合高中第六学级（sixth form）的学生阅读。
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations***（Cambridge University Press）。一场关于欧拉公式和证明本质的对话。
- **H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes***（Dover）。论述正多面体及其高维同类的经典著作。

完整的引导式解答见第 7.9 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/platonic-solids.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com