7.8 四个平方数

工作纸

题目

STEP III 1994，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s3-q8

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　回想两平方的版本：$(a^2+b^2)(p^2+q^2)$ 是两个平方数之和，因为对复数 $z=a+b\mathrm{i}$、$w=p+q\mathrm{i}$ 有 $|z|^2|w|^2=|zw|^2$。矩阵可以怎样把这个结果推广到四个平方？

阶段 1　行列式是四个平方之和

涵盖：每个矩阵的行列式

> **想一想**　求出 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$ 的行列式（determinant）。对于复数（complex number）z，zz^* 是甚么？

阶段 2 乘积具有相同的形式

涵盖：两个矩阵的乘积

> **停一停，试一试** 把两个矩阵（matrix）相乘。把乘积的第一行记作 (w_1, w_2)。第二行是否就是 $(-w_2^*, w_1^*)$？然后对等式两边取行列式。

阶段 3 读出四个平方

涵盖：求 L_1、L_2、L_3、L_4

> **想一想** 把 w_1 和 w_2 以 a, b, c, d, p, q, r, s 展开，再把它们各自分成实部（real part）和虚部（imaginary part）。这四个部分就是你要找的 L。

背后的数学

拉格朗日四平方和定理

拉格朗日的证明大致如下。根据欧拉恒等式，只需证明每个质数 p 都是四个平方数之和。先用一个计数论证，证明存在某个倍数 mp（其中 $m < p$）是四个平方数之和。然后用一个巧妙的“递降法”（descent）证明：若 mp 是四个平方数之和而 $1 < m < p$，则

对某个更小的 m'，$m'p$ 也是四个平方数之和；如此重复下去，便会到达 $m = 1$。（可与 Section 1.5 中费马的递降法比较。）1834 年，雅可比（Jacobi）更进一步，求出把 n 写成四个平方数之和的方法的确切数目：n 的所有非 4 的倍数的因数之和的 8 倍。例如，1 有 8 种写法（±1 可放在四个位置中的任何一个）。

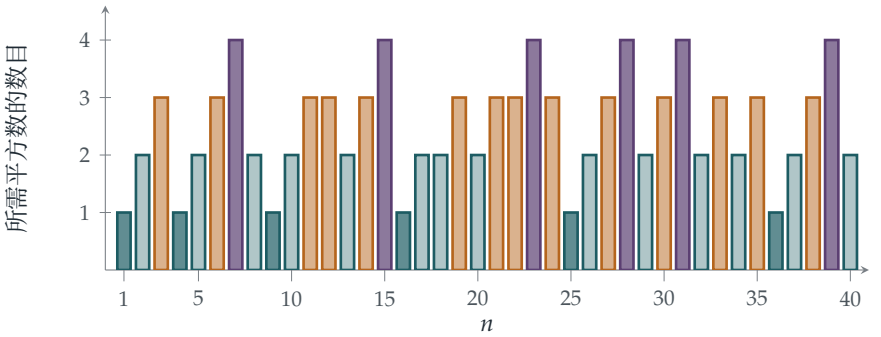

图 7.8.1　由 1 至 40 的每个 n 最少需要多少个平方数才能组成。根据拉格朗日定理，每个数最多只需四个。需要四个的数（紫红色）是 $7, 15, 23, 28, 31, 39, \ldots$：根据勒让德（Legendre）和高斯（Gauss）的一条定理，它们正好是形如 $4^k(8m + 7)$ 的数。

二、三、四

不同维数之间的规律相当微妙。两平方和来自复数，而一个数是两个平方数之和，当且仅当它的质因数中形如 $4k + 3$ 的都以偶数次幂出现（Section 1.6）。四平方和来自四元数，而每个数都是四平方和。但三平方和却完全没有乘法恒等式（并不存在一个“大小”具可乘性的三维数系；这正是哈密顿（Hamilton）研究三元组时失败的原因，见 Section 6.7），相应的定理也较难：勒让德和高斯证明了，除非 $n = 4^k(8m + 7)$，否则 n 是三个平方数之和（图 7.8.1）。四以上，八维的八元数（octonion）给出一条八平方恒等式，由 Degen 和 Graves 发现；而胡尔维兹（Hurwitz）于 1898 年证明，这类恒等式只在 1、2、4 和 8 个平方的情况下存在。

华林问题

拉格朗日定理是华林（Edward Waring）于 1770 年提出的一个问题的第一个情况：对每个 k，是否存在一个数 $g(k)$，使得每个正整数都是最多 $g(k)$ 个 k 次幂之和？希尔伯特（David Hilbert）于 1909 年证明了确实存在。现在我们知道 $g(2) = 4$、$g(3) = 9$（例如 $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$ 需要九个立方数）以及 $g(4) = 19$。

延伸练习

1 **一个实例。**利用 $L_1, \ldots, L_4$ 的公式，取 $(a,b,c,d) = (p,q,r,s) = (2,1,1,1)$，把 $49 = 7 \times 7$ 写成四个平方数之和，并验算你的答案。它与显而易见的 $49 = 7^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ 是否相同？

2 **四平方中的两平方。**证明若 $c = d = r = s = 0$，这条恒等式便简化为 Section 1.6 的两平方恒等式。

3 **需要四个平方的数。**考虑平方数模 8 的余数，证明形如 $8m + 7$ 的数都不是三个平方数之和。

4 **雅可比公式。**数一数把 2 表示成四个平方数之和的方法有多少种（次序和正负号不同均视为不同），并验证答案是 $8 \times (1 + 2) = 24$。

延伸阅读

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***（Cambridge University Press）。第 V 章证明了拉格朗日四平方和定理。
- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions***（A. K. Peters）。讲述四元数的算术，包括利用四元数整数证明四平方和定理。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，“Representing numbers as sums of two squares”（把数表示成两个平方数之和）一章。与本节相配的两平方版本。

完整的引导式解答见第 7.8 节：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/four-squares.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com