7.7 永恒不变的量

工作纸

题目

STEP III 2024，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停*，*试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　表达式 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 称为 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{N}$ 的*交换子*（commutator）。它在甚么时候等于零？根据第 (i) 部分，它的迹是多少？

阶段 1　迹

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　设 $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$，只须计算 $\mathbf{MN}$ 和 $\mathbf{NM}$ 的对角线元素。

阶段 2 行列式的导数

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 用积法则（product rule）对 $ad - bc$ 求导。然后利用 2×2 矩阵的逆矩阵（inverse matrix）公式，计算 $\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$ 的对角线元素。

阶段 3　三个守恒量

涵盖：第 (iii) 部分：三个常数

想一想　至于迹（trace），对微分方程（differential equation）两边取迹，再运用第 (i) 部分的结果。

停一停，试一试　至于行列式（determinant），在方程两边左乘 $\mathbf{M}^{-1}$，再运用第 (ii) 部分的结果。你会用到 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\mathbf{N}$：这为甚么成立？至于 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2)$，把它用 $\operatorname{tr}\mathbf{M}$ 和 $\det\mathbf{M}$ 表示出来。

阶段 4 显式解

涵盖：第 (iii) 部分：求解 $\mathbf{M}$

想一想 把 $\mathbf{N}$ 拆成 $t\mathbf{I}$ 加上 $t\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$。$t\mathbf{I}$ 这部分与 $\mathbf{M}$ 可交换（commute），所以会在 $\mathbf{MN}-\mathbf{NM}$ 中消去。

停一停，试一试 写出 a、b、c、d 所满足的四条微分方程。先解 c，再解 a 和 d，最后解 b。验算你所得的迹和行列式确实是常数。

阶段 5　另一条方程

涵盖：第 (iv) 部分

> **停一停，试一试**　若 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}\mathbf{N}$，则 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$，而第 (ii) 部分把 $\operatorname{tr}\mathbf{N}$ 与 $\det\mathbf{M}$ 的变化联系起来。试找一个迹保持不变、行列式却会改变的 $\mathbf{M}$，例如 $\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$。

背后的数学

孤立子与拉克斯对

1834 年，苏格兰工程师 John Scott Russell 策马追踪一个沿爱丁堡附近的联合运河（Union Canal）前进的孤立波，追了超过一英里，波形始终没有改变。这类波由*科特韦赫－德弗里斯*（*Korteweg–de Vries*，简称 *KdV*）方程描述。到了 1960 年代，Norman Zabusky 与 Martin Kruskal 的电脑实验显示，两个这样的“孤立子”可以相撞，然后原封不动地离开，仿佛它们是粒子一样。要解释这个现象，需要无穷多个守恒量。彼得. 拉克斯在 1968 年证明，KdV 方程可以写成 $\dot{L} = LP - PL$，其中 L 和 P 是一对微分算子（differential operators）；于是，与这道题完全一样，L 的特征值是守恒的，而它们正好提供了那无穷多条守恒定律。拥有拉克斯对的系统称为*可积*（integrable）系统，它们属于少数可以精确求解的非线性系统。

等谱流

由于 $\mathbf{M}$ 的迹和行列式决定了它的特征多项式（characteristic polynomial）$\lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\lambda + \det\mathbf{M}$，$\mathbf{M}$ 的特征值不随时间改变。流 $\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \mathbf{N}]$ 使 $\mathbf{M}$ 在特征值固定的矩阵所组成的集合之内移动。事实上，解总是具有 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}(t)^{-1}\mathbf{M}(0)\mathbf{S}(t)$ 的形式，其中 $\mathbf{S}(t)$ 是某个可逆矩阵：这个矩阵始终与它的初始值相似（similar）。同一个想法贯穿整个物理学：在量子力学中，可观测量（observable）$\mathbf{A}$ 按 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\mathbf{H}, \mathbf{A}]$ 演化，其中 $\mathbf{H}$ 是能量，所以凡

是与能量可交换的量都是守恒的。

雅可比公式

第 (ii) 部分对任何大小的可逆矩阵都成立，称为**雅可比公式**（Jacobi's formula）。最稳妥的写法是不用对数，写成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \det\mathbf{M}\,\operatorname{tr}\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$，因为 $\det\mathbf{M}$ 可能是负数；对数形式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$ 需要 $\det\mathbf{M} > 0$（一般情况下则用 $\ln|\det\mathbf{M}|$）。由此可得一个推论：若 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\mathbf{M}$，其中 $\mathbf{A}$ 是常数矩阵，则 $\det\mathbf{M}(t) = e^{t\operatorname{tr}\mathbf{A}}\det\mathbf{M}(0)$。在微分方程的研究中，这个结果告诉你相空间（phase space）中的体积如何增长或缩小；对于经典力学的方程，这个迹等于零，体积保持不变，这个结果称为**刘维尔定理**（Liouville's theorem）。

延伸练习

1 **验算解。**通过求导，验证第 4 阶段的矩阵 $\mathbf{M}(t)$ 满足 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$。

2 **相似性。**证明：若 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S}$，其中 $\mathbf{M}_0$ 是常数矩阵，而 $\mathbf{S}(t)$ 满足 $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{N}$，则 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$。（提示：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{S}^{-1} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}$。）

3 **体积增长。**设 $\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$。求满足 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N}$ 的 $\mathbf{N}$，并验证 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\mathbf{N}$。

4 **更高次幂。**直接证明：当 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$ 时，对每个正整数 k 都有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = 0$。

延伸阅读

- **P. G. Drazin & R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction***（Cambridge University Press）。大学本科程度的标准入门书，内容包括拉克斯对。
- **Thierry Dauxois & Michel Peyrard, *Physics of Solitons***（Cambridge University Press）。书中讲述了 Scott Russell 那个孤立波的故事。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。讲解对称性如何带来守恒定律。

完整的引导式解答见第 7.7 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/lax-pairs.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com