7.6 双曲旋转与相对论

工作纸

题目

STEP III 1991，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s3-q6

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　$\cosh u$ 和 $\sinh u$ 满足哪一条恒等式，与 $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ 相对应？$\cosh(u+v)$ 和 $\sinh(u+v)$ 的加法公式又是甚么？

阶段 1 双曲线（hyperbola）保持不变（invariant）

涵盖：双曲线，以及映射到自身的过原点直线

想一想 展开 $x'^2 - y'^2$。交叉项（cross terms）会互相抵消。最后一步要用哪一条恒等式（identity）？

停一停，试一试 若一条过原点的直线的方向是特征向量（eigenvector），该直线便会映射到自身。试试方向 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$。

阶段 2　双曲角（hyperbolic angle）相加

涵盖：斜率（gradient），$v' = v + u$

想一想　斜率为 $\tanh v$ 的直线，方向为 $(\cosh v, \sinh v)$。把 T 作用于这个方向，并使用加法公式（addition formulas）。为甚么直线是否通过原点并无影响?

阶段 3 夹角何时保持不变？

涵盖：夹角相等的条件

想一想 使用 $\tan\psi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$，其中 $m_i = \tanh v_i$，然后把分子和分母同时乘以 $\cosh v_1 \cosh v_2$。

停一停，试一试 你应该会得到分子为 $\sinh(v_1 - v_2)$，分母为 $\cosh(v_1 + v_2)$。在 T 的作用下，两者之中哪一个会改变？何时有 $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$？

阶段 4　图像

涵盖：相交于原点的直线

> **想一想**　当 $v_1 + v_2 = -u$ 时，v_1' 和 v_2' 是甚么？把新的直线与原来的直线对 x 轴的反射（reflection）作比较。

背后的数学

狭义相对论

在爱因斯坦的狭义相对论（1905 年）中，以恒定相对速度运动的不同观察者，对时间和距离的量度并不一致，但他们对 $t^2 - x^2$ 这个量（取光速 $c = 1$）却意见一致，这个量称为时空间隔（spacetime interval）。保持它不变的变换就是劳仑兹变换（Lorentz transformation），而在一个空间维度的情况下，它们恰好就是本题的矩阵，其中 x 为时间、y 为距离。一个以速度 $v = \tanh u$ 运动的观察者，所用的坐标与我们的坐标就是由这个矩阵联系起来，其中 $\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$，即时间膨胀（time dilation）中著名的因子 γ。闵可夫斯基（Hermann Minkowski）在 1908 年看出，这使时空成为一种四维几何，其“距离”之中带有一个负号：“从今以后，空间本身和时间本身，都注定要消退成为影子。”

题目的物理意义

- **不变直线** $y = \pm x$ 是光线的路径。它们对每个观察者都相同：光速对所有人都一样，这正是相对论的奠基原理。
- **双曲线** $x^2 - y^2 = 1$ 是与原点相距一个单位“原时”（proper time）的所有事件所成的集合，而原时是由以各种可能的恒定速度运动的观察者所量度的。
- **快度相加。**通过原点而斜率为 $\tanh v$ 的直线，是一个以速度 $\tanh v$ 运动的物体的路径。快度为 u 的推进把它的速度变为 $\tanh(v+u) = \frac{\tanh v + \tanh u}{1 + \tanh v \tanh u}$，这就是 Section 3.8

中爱因斯坦的速度相加公式。速度不能直接相加，快度却可以。

而在 Section 5.8 中，我们见过同一条加法公式，它是庞加莱圆盘（Poincaré disc）中的距离法则：相对论中所有可能的速度所成的集合，以快度来量度，就是一个双曲空间（hyperbolic space）。

延伸练习

1 **推进的复合。**证明 $T(u)T(w) = T(u+w)$，其中 $T(u)$ 是题目中的矩阵。$T(u)^{-1}$ 是甚么？

2 **时间膨胀。**一艘太空船以光速的 0.8 倍航行。求它的快度 u 和 $\cosh u$。若地球上过了 10 年，船上过了多少时间？（利用 $t_{\text{船}} = t_{\text{地球}} / \cosh u$。）

3 **双曲面积。**证明由双曲线 $x^2 - y^2 = 1$、x 轴，以及由原点至 $(\cosh v, \sinh v)$ 的线段所围成的面积为 $\frac{v}{2}$，正如圆的相应面积为 $\frac{\theta}{2}$。为甚么 T 必定保持这类面积不变？

4 **挤压。**把坐标转换为 $p = x + y$，$q = x - y$。证明 T 变成 $p \mapsto e^{u}p$，$q \mapsto e^{-u}q$，而双曲线则变成 $pq = 1$。试在这组坐标下，以几何方式描述这个变换。

延伸阅读

- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics***（W. H. Freeman）。以快度和时空图讲解狭义相对论，适合具备高级程度（A-level）数学基础的学生。
- **Tevian Dray, *The Geometry of Special Relativity***（CRC Press）。把相对论看成双曲三角学，与本节的精神完全一致。
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（多种版本）。爱因斯坦亲自撰写的通俗读物，至今仍然十分易读。

完整的引导式解答见第 7.6 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/hyperbolic-rotations.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com