7.5 三维空间中的旋转

工作纸

题目

STEP III 2022，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　当 $\mathbf{r}$ 垂直于 $\mathbf{n}$ 时，$\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 在几何上是甚么样子？当 $\mathbf{r}$ 平行于 $\mathbf{n}$ 时又如何？

阶段 1 两次叉积

涵盖：第 (i) 部分

想一想 设 $\mathbf{n} = (a, b, c)$ 及 $\mathbf{r} = (x, y, z)$。先求出 $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$，再用 $\mathbf{n}$ 与它作一次叉积（cross product），然后观察 x 分量（component）。

停一停，试一试 利用 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 代换 $b^2 + c^2$。你能从余下的式子中看出 $\mathbf{n}.\mathbf{r}$ 吗？

阶段 2　旋转（rotation）

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　$g(\mathbf{n})$ 是甚么？记住 $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$。

停一停，试一试　现在取 $\mathbf{r}$ 垂直（perpendicular）于 $\mathbf{n}$。第 (i) 部分指出 $f(f(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$。化简 $g(\mathbf{r})$。与 $\mathbf{r}$ 相比，$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ 是怎样的?

阶段 3 反射（reflection）

涵盖：第 (iii) 部分

> **停一停，试一试** 利用第 (i) 部分化简 h。h 对 $\mathbf{n}$ 有甚么作用？对垂直于 $\mathbf{n}$ 的向量又有甚么作用？

背后的数学

欧拉旋转定理

三维空间中每一个固定原点的旋转，都是绕某条通过原点的轴的旋转。欧拉（Euler）于 1775 年证明了这一点。用矩阵的语言来说，每个 3×3 旋转矩阵都有一个特征值（eigenvalue）为 1 的特征向量（eigenvector），也就是旋转轴。罗德里格公式给出其逆命题：对每一条轴 $\mathbf{n}$ 和每一个角 θ，旋转矩阵是

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{K} + (1-\cos\theta)\,\mathbf{K}^2, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{K}$ 是 $\mathbf{r}\mapsto \mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 的矩阵。由于 $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$，指数级数（exponential series）$e^{\theta\mathbf{K}} = \mathbf{I} + \theta\mathbf{K} + \frac{\theta^2}{2!}\mathbf{K}^2 + \cdots$ 恰好化简成这条公式，它就是 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 的三维版本。旋转与“无穷小旋转”$\mathbf{K}$ 的指数之间的这种联系，正是李群（Lie groups）理论的起点。

旋转不可交换

把一本书平放，先绕垂直轴旋转 90°，再绕水平轴旋转 90°；然后从头再来，以相反的次序做这两个旋转。书最终的位置并不相同。三维空间中旋转的复合（composition）不符合交换律，与二维的情况不同。这正是 Section 6.7 的四元数（quaternion）有用的原因之一：绕 $\mathbf{n}$ 旋转 θ 对应于四元数 $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(a\mathrm{i} + b\mathrm{j} + c\mathrm{k})$，而复合旋转就是把四元数相

乘，不可交换性已包含在其中。罗德里格本人在 1840 年的论文中，已找到旋转的复合公式，比哈密顿（Hamilton）发明四元数还早三年。

延伸练习

1 **平面上的旋转。**试做 STEP III 2017，第 2 题（step.maths.org/questions/17-s3-q2）。该题利用复数，证明平面上的两个旋转复合起来仍是一个旋转，只有一种例外。找出这个例外，以及此时复合的结果是甚么。

2 **一个具体的旋转。**求绕方向为 $(1,1,1)$ 的轴旋转 120° 的矩阵。证明它把各坐标轴循环置换。

3 **$\mathbf{K}$ 的幂。**证明 $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$ 及 $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$，并由指数级数推导出罗德里格公式。

4 **两次反射构成一个旋转。**证明先后对两个通过原点、互成 α 角的平面作反射，结果是绕两平面的交线旋转 2α。

延伸阅读

- **Simon Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups***（Dover）。关于三维旋转的权威论著，当中包括罗德里格的贡献。
- **Simon Altmann, "Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal"**, *Mathematics Magazine* 62 (1989)。一篇简短而生动的历史叙述。
- **John Stillwell, *Naive Lie Theory***（Springer）。为大学本科生而写的旋转、四元数与李群入门。

完整的引导式解答见第 7.5 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/rotations-3d.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com