7.4 回到起点的矩阵

工作纸

题目

STEP II 2020，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　每个 2×2 矩阵都满足 $\mathbf{M}^2-(\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M}+(\det\mathbf{M})\mathbf{I}=\mathbf{0}$（这是凯莱—哈密顿定理（Cayley–Hamilton theorem）；把它乘开来验证一下）。这对处理有关 $\mathbf{M}^2$ 的问题有甚么帮助？

阶段 1　平方的迹

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　把 $\mathbf{M}^2$ 乘开，再把对角线上的元素相加，然后与 $(a+d)^2$ 比较。

阶段 2 $\pm\mathbf{I}$ 的平方根

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 把 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ 代入 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$，其中 $t = a + d$，$d = \det \mathbf{M}$。若 $t \neq 0$，$\mathbf{M}$ 必定是哪一类矩阵（matrix）？

停一停，试一试 证明 $t \neq 0$ 必然导致 $\mathbf{M} = \pm\mathbf{I}$，而这个情况已被排除。因此 $t = 0$：那么 $\det \mathbf{M}$ 是多少？对 $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$ 作同样的处理，并记得证明逆命题（converse）。

阶段 3　四次方根

涵盖：第 (iii) 部分

停一停，试一试　设 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$，则 $\mathbf{M}^4 = \mathbf{I}$ 即是 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{I}$。对 $\mathbf{N}$ 应用第 (ii) 部分的结果。为甚么 $\det \mathbf{N}$ 不可能是 -1?

想一想　对于 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$，对 $\mathbf{N}$ 应用第 (ii) 部分的后半部分，并利用第 (i) 部分，以 $\operatorname{tr}\mathbf{M}$ 和 $\det\mathbf{M}$ 表示 $\operatorname{tr}\mathbf{N}$ 和 $\det\mathbf{N}$。

阶段 4 $\mathbf{I}$ 的一个并非旋转的八次方根

涵盖：第 (iv) 部分

? **想一想** 任何满足 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ 的矩阵都有 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$。试找出一个迹（trace）和行列式（determinant）都符合要求、但元素并非旋转（rotation）矩阵元素的矩阵。怎样才能验证它既不是旋转，也不是反射（reflection）？

背后的数学

相似矩阵

为甚么说第 4 步的 $\mathbf{M}$ 是“伪装了的旋转”？若存在可逆（invertible）矩阵 $\mathbf{S}$ 使得 $\mathbf{M} = \mathbf{SRS}^{-1}$，则称两个矩阵 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{R}$ 相似（similar）：它们在不同的坐标下表示同一个变换。相似矩阵有相同的迹和行列式，而且（对于不是 $\mathbf{I}$ 的倍数的 2×2 矩阵）逆命题也成立。所以任何迹为 $\sqrt{2}$、行列式为 1 的实矩阵都与 45° 的旋转相似，而在 $\mathbf{S}$ 所给出的斜坐标下，它就只是在旋转（图 7.4.1（见网上该节的完整版））。一般而言，满足 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$ 的 2×2 实矩阵必定与某个旋转或反射相似。

为甚么晶体没有五重对称

晶体是原子有规律、重复的排列。晶体的旋转对称把原子所成的格（lattice）映射到它自身，所以在以这个格为基础的坐标下，它由一个元素全是整数的矩阵给出。因此它的迹是整数。但是旋转角为 θ 的旋转，在任何坐标下的迹都是 $2\cos\theta$，而 $2\cos\theta$ 只有在等于 $-2, -1, 0, 1$ 或 2 时才是整数，也就是对应阶（order）为 2、3、4 和 6（以及 1）的旋转。五重对称需要 $2\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，而这不是整数。这就是晶体学限制定理（crystallographic restriction theorem）。1982 年，Dan Shechtman 观察到一种看似具有五重对称的合金，起初还遭人嘲笑；后来才知道那是一种准晶体（quasicrystal），有序但没有周期性，就像彭罗斯铺砖（Penrose tilings）一样，因此不在该定理的涵盖范围之内。他于 2011 年获颁

诺贝尔化学奖。

延伸练习

1. **三阶的旋转。**试做 STEP II 2021，第 7 题（载于 OCR 提供下载的 2021 年试卷，www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip）。它从一个具有不寻常性质的旋转矩阵出发，最后得出一个结论，适用于所有立方为单位矩阵（identity matrix）的 2×2 实矩阵。

2. **六阶。**求迹和行列式须满足的条件，使得 $\mathbf{M}^6 = \mathbf{I}$，但 $\mathbf{M}^2 \neq \mathbf{I}$ 且 $\mathbf{M}^3 \neq \mathbf{I}$。

3. **晶体学限制。**证明：若 $\mathbf{M}$ 的元素全是整数，$\det \mathbf{M} = 1$，且对某个 n 有 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$，则 $\operatorname{tr} \mathbf{M} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$。找出一个阶为 6 的整数矩阵。

4. **以凯莱－哈密顿定理求幂。**利用 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$，把 $\mathbf{M}^3$ 和 $\mathbf{M}^4$ 表示成 $p\mathbf{M} + q\mathbf{I}$ 的形式，并借此重新推导 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ 的条件。

延伸阅读

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***（Springer）。内容包括晶体学限制和墙纸图案的分类。
- **Marjorie Senechal, *Quasicrystals and Geometry***（Cambridge University Press）。准晶体与非周期有序结构的数学。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。相似矩阵与凯莱－哈密顿定理。

完整的引导式解答见第 7.4 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/finite-order.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com