7.3 甚么才算行列式

工作纸

题目

STEP II 2019，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　题目中每个特殊矩阵各有甚么作用？对一般的 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，计算 $\mathbf{JM}$、$\mathbf{MJ}$、$\mathbf{KM}$ 和 $\mathbf{PM}$。

阶段 1　单位矩阵

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　写出 $\mathbf{M} = \mathbf{MI}$，然后对等式两边应用 f。你可以选一个合适的 $\mathbf{M}$，然后除以 $\mathrm{f}(\mathbf{M})$。

阶段 2 对换

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 计算 $\mathbf{J}^2$。由此可以知道 $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2$ 的甚么？两个可能的值之中，哪一个可以排除?

停一停，试一试 把题目给出的两个矩阵（matrix）各自写成 $\mathbf{J}$、$\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{J}$ 按某个次序相乘的乘积（product），然后应用 f。

阶段 3　线性相关的行

涵盖：第 (iii) 部分

> **停一停，试一试**　先取一个两行（row）相等的矩阵 **B**。**JB** 是甚么？应用 f，并利用第 (ii) 部分的结果。然后把 **B** 乘以 **K**，得出第二行是第一行 k 倍的矩阵。

阶段 4 **错切**

涵盖：第 (iv) 部分

想一想 计算 $\mathbf{P}^2$ 和 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}$。$k$ 取甚么值时两者相等?

停一停，试一试 对该等式两边应用 f，便会得到一条关于 $\mathrm{f}(\mathbf{P})$ 的方程（equation），它有两个解。为甚么 $\mathrm{f}(\mathbf{P})$ 不可能是 0？利用 $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$。

背后的数学

每个乘性函数都是行列式的函数

题目在 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$ 处便停下，但这个论证是可以完成的。每个可逆矩阵都是初等矩阵（elementary matrices，即行对调、行缩放和错切）的乘积，而题目已说明 f 在每一种上的表现。由此可知 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \phi(\det \mathbf{M})$，其中 ϕ 是某个单一实数变量的函数，并满足 $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$。行列式本身就是 $\phi(x) = x$ 的情况，但 $\phi(x) = x^3$ 或 $\phi(x) = |x|^{1/2}\operatorname{sign}(x)$ 同样可行。换言之，行列式是矩阵上唯一真正崭新的乘性函数。用群论（group theory）的语言来说，可逆矩阵所成的群之中，凡是交换群（commutative group）所能看见的一切，行列式都已尽数捕捉。

行列式作为面积

从几何上看，2×2 矩阵把单位正方形变成一个平行四边形，而 $\det \mathbf{M}$ 就是它的*有向面积*（signed area）：若定向（orientation）保持不变则为正，若定向反转则为负（图 7.3.1）。这样，乘法性质的意义便一目了然：相继进行两个变换，面积的比例因子便会相乘。行对调会反转定向，所以 $\det \mathbf{J} = -1$；错切把正方形推斜成面积相同的平行四边形，所以 $\det \mathbf{P} = 1$；而两行线性相关的矩阵会把正方形压扁，所以它的行列式为零。题目的每一步都有对应的图像。

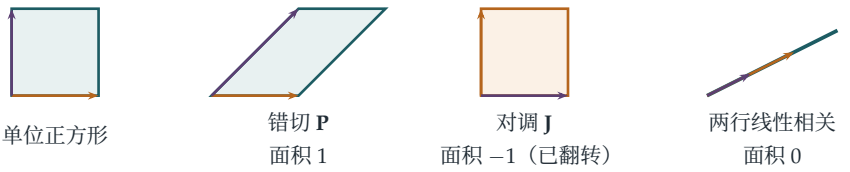

图 7.3.1　行列式作为有向面积。两个基向量（basis vectors）的像（琥珀色、梅紫色）张成一个平行四边形。错切保持面积不变；对调基向量会反转定向；线性相关的两行（或两列）把正方形压缩到一条直线上。相继进行两个变换，有向面积便会相乘，这正是性质 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$。

高维的行列式

对于 $n \times n$ 矩阵，行列式是有向体积的比例因子，并由三个性质所刻划：它对每一行都是线性的，两行对调时它会变号，而且它在单位矩阵上等于 1。单凭这三点，你就能推导出熟悉的展开公式，而高斯消元法则提供了一个高效的计算方法。行列式出现在多重积分的换元公式（雅可比行列式，Jacobian）之中，出现在逆矩阵的公式之中，并且如我们在 Section 5.4 所见，也出现在多项式的判别式（discriminant）之中。

延伸练习

1. **其他例子。**证明 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})^3$ 满足题目的所有条件，并证明 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = |\det \mathbf{M}|$ 满足乘法性质，但不满足 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$。

2. **列运算。**证明对于任何第二列是第一列的倍数的矩阵，f 的值同样为零。

3. **缩放。**设 $\mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$。证明 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$，并证明 $\mathrm{f}(\mathbf{K}_k)\mathrm{f}(\mathbf{K}_l) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_{kl})$。

4. **归结为行列式。**较难 证明每个可逆的 2×2 矩阵都可以写成形如 $\mathbf{J}$、$\mathbf{K}_k$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵的乘积。由此推导出 $\mathrm{f}(\mathbf{M})$ 只取决于 $\det \mathbf{M}$。

延伸阅读

- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（Springer；网上免费阅览）。从行列式的性质出发来定义行列式，与本题的精神一脉相承。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。第 5 章从三条规则出发建立行列式的理论。
- **3Blue1Brown, “The determinant”**（影片，网上免费观看）。以精美的动画呈现行列式的面积诠释。

完整的引导式解答见第 7.3 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/determinant-axioms.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com