7.2 只伸缩，不转向

工作纸

题目

STEP III 1990，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s3-q6

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　T 使一个向量“方向不变，只乘以一个纯量”，这是甚么意思？试把它写成一条等式。

阶段 1　特征向量

涵盖：方向保持不变的两个向量

> **想一想**　把矩阵（matrix）分别作用于 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$。每个结果是否都是原来向量的倍数？是多少倍？

阶段 2 圆的像

涵盖：E 的方程及其面积

想一想 求出矩阵的逆矩阵（inverse matrix），从而以 X 和 Y 表示 x 和 y。代入 $x^2 + y^2 = 1$ 并化简。

停一停，试一试 关于面积：线性映射（linear map）会把每个面积乘以其行列式（determinant）的绝对值。C 所围的面积是多少？你可以用第一阶段求得的两个伸缩因子（stretch factor）来验算答案。

阶段 3　X 的最大值

涵盖：X 在 E 上的最大值

> **想一想**　以 C 上的点 (x, y) 表示 X。当 $x^2 + y^2 = 1$ 时，$9x - 2y$ 最大可以是多少？试把它看成与一个单位向量（unit vector）的点积（dot product）。

阶段 4　切线

涵盖：E 的切线

> **停一停，试一试**　C 在 $\frac{1}{5}(3, 4)$ 的切线（tangent）是 $3x + 4y = 5$。线性映射把切线映射为切线，因此把你以 X 和 Y 表示 x 和 y 的式子代入这条直线。

背后的数学

谱定理

每个实对称矩阵都有一整组互相垂直的特征向量，而且特征值都是实数。这就是*谱定理*（spectral theorem），是大学第一门线性代数（linear algebra）课程的核心结果之一。它告诉我们，每个对称的线性映射，在合适的垂直坐标下，都只是沿各条轴的拉伸。换个

说法，每个像 $8X^2 + 12XY + 17Y^2$ 这样的二次型（quadratic form），都可以经旋转化成 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$ 的形式，所以每条有心圆锥曲线（central conic）都是轴互相垂直的椭圆或双曲线（*主轴定理*，principal axis theorem）。这个想法可追溯至 1820 年代的柯西（Cauchy），他用它来求二次曲面的主轴，以及固体内应力的主轴。

这一切之所以成立，全靠对称性。不对称的矩阵就未必这样合作：旋转 90° 会转动每一个方向，所以它完全没有实特征向量；而错切（shear）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 只有一个特征向量方向，所以它不是沿任何一对轴的拉伸。

无处不在的特征向量

以下是特征向量出现的其中几个地方。

- **振动。**由质点和弹簧组成的系统会以*简正模态*（normal mode）振动，即各部分以同一频率同步运动的模式。这些模态是某个矩阵的特征向量，而频率则来自特征值（Section 11.2）。
- **数据。**一团数据点分布得最散的方向，就是其协方差矩阵（covariance matrix）的特征向量。找出这些方向的方法称为*主成分分析*（principal component analysis），是统计学和机器学习的基本工具之一（Section 13.7）。
- **量子力学。**量度一个物理量可能得到的结果，是某个矩阵（或算子）的特征值，而原子的能级也是特征值。
- **网上搜索。**Google 的 PageRank 是这个搜索引擎背后的原始构想：有一个描述网页之间连结的巨型矩阵，PageRank 就按它那个特征值为 1 的特征向量的各个分量来为网页排名。

延伸练习

1 **求特征值。**证明 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的特征值是 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$ 的根，并验证题目中的矩阵给出 $\lambda = 2$ 和 4。

2 **互相垂直的特征向量。**证明若 $\mathbf{M}$ 是对称矩阵，且 $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$、$\mathbf{Mv} = \mu\mathbf{v}$，其中 $\lambda \neq \mu$，则 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$。（*提示*：用两种方法计算 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu}$。）

3 **旋转。**证明除非 θ 是 π 的倍数，否则旋转矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 没有实特征向量。它的复特征值是甚么？

4　幂。利用特征向量，求 $T^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。（提示：把 $(1,0)$ 写成 $(1,2)$ 和 $(2,-1)$ 的组合。）

延伸阅读

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。第 6 章是特征值及其应用的出色入门。
- **Kurt Bryan & Tanya Leise, "The $25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind Google"**，*SIAM Review* 48 (2006)。浅白易读，可免费取阅。
- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra***（影片系列，可在网上免费观看）。以精美的动画呈现的，正是本节的几何概念。

完整的引导式解答见第 7.2 节：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/eigenvectors.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com