7.1 对矩阵不成立的法则

工作纸

题目

STEP II 1993，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q6

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　对实数而言，为甚么 $ab = 0$ 可推出 $a = 0$ 或 $b = 0$？这个论证用到了数的哪一项性质？这项性质对矩阵成立吗？

阶段 1 可否 $\mathbf{AB} = 0$ 但 $\mathbf{BA} \neq 0$?

涵盖：第 (i) 部分

想一想 使用含有大量零的 2×2 矩阵（matrix）。试试 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，它保留 x 分量，并把 y 分量消去。

停一停，试一试 找一个非零的 $\mathbf{B}$，使它把每个向量（vector）都送到 y 轴上，这样 $\mathbf{A}$ 随后便会把它消去。现在把 $\mathbf{BA}$ 也计算出来。它是零吗?

阶段 2　平方差

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　展开 $(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$，过程中不要调换任何乘积的次序。它在甚么情况下等于 $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$？你可以再用第 (i) 部分的矩阵吗？

阶段 3 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的非零解

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 若 $\det\mathbf{A}\neq 0$，在 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的左边乘以 $\mathbf{A}^{-1}$。$\mathbf{X}$ 必定是甚么？

停一停，试一试 若 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 且 $ad=bc$，试试列向量（column vector）$\begin{pmatrix}b\\ -a\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}d\\ -c\end{pmatrix}$。$\mathbf{A}$ 会把它们变成甚么？用其中一个构造出非零的 $\mathbf{X}$。

阶段 4　有多少个平方根？

涵盖：第 (iv) 部分

> **停一停，试一试**　选取 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$，使得 $\mathbf{X}^2 + \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B} = (\mathbf{X} - \mathbf{I})^2$。然后你需要许多满足 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ 的矩阵 $\mathbf{N}$：看看 $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

背后的数学

矩阵作为一种代数

凯莱（Arthur Cayley）在 1858 年引入矩阵代数，把矩阵看成可以相加和相乘的单一对象，而不仅仅是系数表。他立刻注意到乘法不满足交换律，并证明了**凯莱—哈密顿定理**（*Cayley–Hamilton theorem*）：每个方阵都满足它自己的特征方程（characteristic equation）。对于迹（trace）为 t、行列式为 d 的 2×2 矩阵，这就是说 $\mathbf{M}^2 - t\mathbf{M} + d\mathbf{I} = \mathbf{0}$，本章会反复用到这个事实（Section 7.4）。2×2 实矩阵构成一个**环**（*ring*）：可以加、减、乘，但乘法不满足交换律，而且存在**零因子**，即乘积为零的非零元素。

无穷多个平方根

第 4 阶段的结论还可以变得更加惊人。方程 $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$ 有明显的解 $\pm\mathbf{I}$，但平面上对任何一条通过原点的直线的反射（reflection）$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 也都是解，因为反射两次等于甚么也没做。这就是 $\mathbf{I}$ 的一整个圆那么多的平方根。系数为数的 n 次多项式最多有 n 个根，是因为数没有零因子；矩阵却有，于是这个根的数目上限便不再成立。

物理学中的非交换性

在经典力学中，位置 x 和动量 p 都是数，并且 $xp = px$。在量子力学中，它们变成算子（operator，即无穷矩阵），满足 $xp - px = \mathrm{i}\hbar$，其中 $\hbar$ 是普朗克（Planck）常数除以 2π。单凭这一条非交换关系，就可推出海森堡的不确定性原理：位置和动量不可能同时被准确得知。海森堡在 1925 年发现量子力学的法则时，并不知道矩阵是甚么；是玻恩（Max Born）认出海森堡所发明的那条奇怪的乘法法则就是矩阵乘法。

延伸练习

1 **甚么时候可交换？** 求所有与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可交换的 2×2 矩阵。

2 **零的平方根。** 求所有满足 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ 的 2×2 实矩阵 $\mathbf{N}$。（提示：利用凯莱–哈密顿定理证明 $\operatorname{tr}\mathbf{N} = \det\mathbf{N} = 0$。）

3 **反射。** 证明每个反射矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 的平方都是 $\mathbf{I}$，并求出它所对应的反射轴。

4 **凯莱–哈密顿定理。** 以直接计算证明每个 2×2 矩阵都满足 $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$。

延伸阅读

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。最受欢迎的线性代数入门教科书，着重理解。
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（Springer；可在网上免费阅读）。取向较为抽象，以线性映射而非矩阵为中心。
- **Jim Baggott, *The Quantum Story***（Oxford University Press）。量子力学的历史，包括海森堡的矩阵力学。

完整的引导式解答见第 7.1 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/matrix-rules.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com