6.8 由奇异矩阵组成的群

工作纸

题目

STEP III 1996，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q6

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　在第 (i) 部分，单位矩阵 $\mathbf{I}$ 并不是 $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ 这种形式。那么 S 的单位元会是甚么？

阶段 1　封闭性（closure）

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　以 $\mathbf{M}_a$ 表示四个元素全为 a 的矩阵。$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b$ 等于甚么？

阶段 2 群公理（group axioms）

涵盖：第 (i) 部分

想一想 单位矩阵（identity matrix）$\mathbf{I}$ 并不在 S 之中。那么 S 的单位元（identity）可以是甚么？由 $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_a$ 解出 e。

停一停，试一试 至于逆元（inverse），由 $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_e$ 解出 b。

阶段 3　奇异性（singularity）会蔓延

涵盖：第 (ii) 部分

> **停一停，试一试**　假设 $\mathbf{A} \in G$ 是奇异矩阵，而 $\mathbf{B}$ 是 G 的任意一个元素。利用 $\mathbf{A}$ 在群中的逆元，把它写成 $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$，其中 $\mathbf{C}$ 属于 G。然后取行列式（determinant）。

阶段 4　一个 3×3 的例子

涵盖：第 (ii) 部分

> **想一想**　你能否把第 (i) 部分推广到 3×3 矩阵？又或者找一个更简单的例子：用一个忽略三个坐标中其中两个的矩阵？

背后的数学

幂等元与隐藏的可逆性

任何矩阵群的单位元 $\mathbf{E}$ 都满足 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$：它是幂等（*idempotent*）的。从几何上看，幂等矩阵就是一个投影（*projection*）：它把每个向量映射到某个子空间（subspace）上，而原本已在该子空间内的向量则保持不变。在第 (i) 部分，$\mathbf{E}$ 把平面投影到直线 $y = x$ 上，

而每个矩阵 $\mathbf{M}_a$ 都是先投影到这条直线上，然后沿着它以因子 $2a$ 拉伸（图 6.8.1）。在这条直线上，这个群的作用是可逆的拉伸；它只是无视了与直线垂直的方向。所以 S 其实就是非零实数的乘法群（通过 $\mathbf{M}_a \mapsto 2a$），只不过它栖身于平面内的一条直线上。这个结论普遍成立：每个由矩阵组成的群，经过换基（change of basis）之后，都是一个由可逆矩阵组成的群，作用于其单位元的像上，其余位置则以零填充。

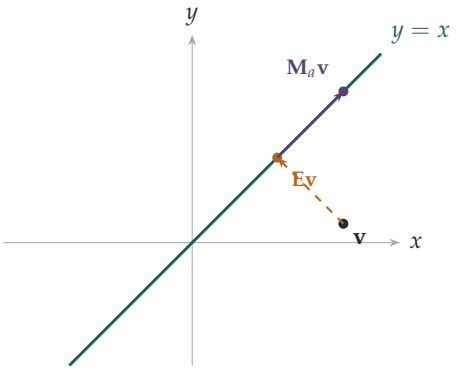

图 6.8.1 第 (i) 部分的矩阵所起的作用。单位元 $\mathbf{E}$ 把每个向量 $\mathbf{v}$ 投影到直线 $y = x$ 上（琥珀色虚线）。每个 $\mathbf{M}_a$ 都先作同样的投影，然后沿着直线以因子 $2a$ 拉伸（紫红色；图中 $2a = \frac{16}{9}$）。在这条直线本身之上，这个群的作用就是普通的可逆缩放。

抽象与具体

人们最早研究的群都是具体的：置换（permutation）、对称、可逆矩阵。抽象的定义（一个集合连同一个满足三条公理的运算）是从这些例子中提炼出来的。本题显示了抽象观点的价值：S 与非零实数的乘法群是*同构*（*isomorphic*）的，即同一个群换了一身衣服，尽管一个由奇异矩阵组成，另一个由数组成。辨认出两个外表不同的结构何时“相同”，是代数最核心的技巧之一，而数学家正是藉同构这个概念把这种“相同”说得精确。

延伸练习

1 **一个同构。**证明映射 $\mathbf{M}_a \mapsto 2a$ 是由 S 到非零实数的一一对应（one-to-one correspondence），并且把矩阵乘法变成数的乘法。

2 **不是群。**证明所有形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 且 $a \neq 0$ 的矩阵所组成的集合在乘法下封闭，但不是一个群。（提示：试找单位元。有没有左单位元？有没有右单位元？）

3 **幂等元。**求所有满足 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$ 的 2×2 实矩阵 $\mathbf{E}$，并从几何角度描述它们。

4 **所有项相等。**证明所有项都等于 $a \neq 0$ 的 $n \times n$ 矩阵在乘法下构成一个群，并求它的单位元。

延伸阅读

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***（Springer）。讲述矩阵群与同构，并附有大量几何例子。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。对投影与幂等矩阵有清晰的讲解。
- **Joseph Gallian, *Contemporary Abstract Algebra***（CRC Press）。一本平易近人的入门教材，载有许多不寻常的群的例子。

完整的引导式解答见第 6.8 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/singular-group.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com