6.7 四元数群

工作纸

题目

STEP III 1993，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q5

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　把数对 (z_1, z_2) 看成代表一个“数” $z_1 + z_2\mathrm{j}$，其中 j 是一个新符号，满足 $\mathrm{j}^2 = -1$，并且对任意复数 w 有 $\mathrm{j}w = w^{*}\mathrm{j}$。试用这些法则计算 $(z_1 + z_2\mathrm{j})(w_1 + w_2\mathrm{j})$。得出的是否就是 $\circ$ 的公式？

阶段 1 藉矩阵处理结合律（associativity）

涵盖：结合律

想一想 直接验证 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ 相当冗长。有没有更巧妙的方法?

停一停，试一试 把 (z_1, z_2) 与复矩阵（complex matrix）$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$ 对应起来。两个这样的矩阵相乘，积的第一行是甚么？矩阵乘法符合结合律。

阶段 2　不符合交换律（commutativity）

涵盖：交换律，以及四个乘积

> **想一想**　试计算 $(0,1)\circ(i,0)$ 和 $(i,0)\circ(0,1)$。然后把零代入定义，得出四个特殊乘积。

阶段 3 八个元素的群（group）

涵盖：集合 S_1

想一想 利用四个特殊乘积，证明 S_1 是封闭（closed）的。单位元（identity）是甚么？

停一停，试一试 求出每个元素的平方。哪些元素的平方是单位元，哪些是 $(-1,0)$？由此求出每个元素的阶（order）和逆元（inverse）。

阶段 4　一个子群（subgroup）

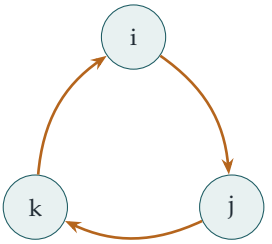
涵盖：子群与矩阵

? **想一想**　计算 B 的各次幂，再计算题目所给矩阵的各次幂，然后把两者逐一对应。

背后的数学

复数之外

实数构成一个一维的数系，在其中可以做加法、乘法和除法；复数则构成一个二维的数系。哈密顿的四元数是四维的，除法依然可行，但乘法不再满足交换律（图 6.7.1）。1878 年，弗罗贝尼乌斯（Ferdinand Frobenius）证明了 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{H}$（取自 Hamilton 的首字母）这三者，是实数域上仅有的、乘法满足结合律的有限维“可除代数”（division algebras）。如果放弃结合律，但保留一个可乘的大小，即 $|xy| = |x|\,|y|$，一如实数、复数和四元数那样，那就恰好还多一个：八维的八元数（octonions），由 John Graves 和凯莱（Arthur Cayley）在 1840 年代发现。赫维兹（Adolf Hurwitz）于 1898 年证明，这类数系就只有这四个。（若不设关于大小的条件，还有其他更古怪的非结合可除代数，但 1958 年一条由博特（Raoul Bott）、米尔诺（John Milnor）和 Michel Kervaire 得出的深刻定理指出，任何有限维实可除代数的维数必为 1、2、4 或 8。）



顺着箭头：$\mathrm{ij}=\mathrm{k}$，$\mathrm{jk}=\mathrm{i}$，$\mathrm{ki}=\mathrm{j}$

逆着箭头：$\mathrm{ji}=-\mathrm{k}$，$\mathrm{kj}=-\mathrm{i}$，$\mathrm{ik}=-\mathrm{j}$

以及 $\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1$

图 6.7.1 哈密顿的乘法法则。把 i、j、k 其中两个顺着箭头方向相乘，得到第三个；逆着箭头方向相乘，则得到第三个的相反数。$\pm1, \pm\mathrm{i}, \pm\mathrm{j}, \pm\mathrm{k}$ 这八个元素构成本题的四元数群 Q_8。

三维空间中的旋转

模（modulus）为 1 的四元数描述三维空间的旋转：绕单位轴 $\mathbf{u}$ 转过角度 θ 的旋转，对应于 $q=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}(u_1\mathrm{i}+u_2\mathrm{j}+u_3\mathrm{k})$，它作用于向量 $\mathbf{v}$（写成 $v_1\mathrm{i}+v_2\mathrm{j}+v_3\mathrm{k}$）的方式是 $\mathbf{v}\mapsto q\mathbf{v}q^{-1}$。旋转的复合就是四元数的相乘。这比使用矩阵或角度更有效率，数值上也更稳定，而且避开了“万向节锁”（gimbal lock）：那是失去一个自由度的现象，当年阿波罗（Apollo）太空人使用以陀螺仪为本的导航系统时，就不得不设法绕过这个问题。半角 $\frac{\theta}{2}$ 也透露出一点深刻的端倪：旋转 360° 得到的是 $q=-1$，而不是 1，物理学家在电子的行为（自旋，spin）中正好看到这个事实。

四平方和

四元数的模是可乘的，$|pq|=|p||q|$，与复数的模一样。把它展开写出，便得到欧拉（Euler）的*四平方恒等式*（four-square identity）：两个四平方和之积，本身也是一个四平方和。这正是拉格朗日（Lagrange）定理的关键一步，该定理指出每个正整数都是四个平方数之和；我们会在 Section 7.8 证明这条定理，它是 Section 1.6 中二平方和结果的四维近亲。

延伸练习

1 **哈密顿的法则。**利用数对，验证 $C\circ B=D$ 及 $B\circ C=H$，即 $\mathrm{ij}=\mathrm{k}$ 及 $\mathrm{ji}=-\mathrm{k}$。

2 **只有一个阶为 2 的元素。**证明 $E=-1$ 是 Q_8 中唯一阶为 2 的元素。由此推断 Q_8 与正方形的对称群（它有五个阶为 2 的元素）并不同构。

3 **四平方和。**证明 $\det M(z_1,z_2)=|z_1|^2+|z_2|^2$。利用 $\det(M_1M_2)=\det M_1\det M_2$，推断两个四平方和之积是一个四平方和。

4 **子群。**找出 Q_8 的所有子群。证明除了 $\{A\}$ 之外，每个子群都包含 E，并证明 Q_8 是它三个阶为 4 的循环子群的并集（试与 Section 6.6 比较）。

延伸阅读

- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions***（A. K. Peters）。讲述四元数和八元数的几何与算术。程度较深，但引人入胜。
- **John Baez, "The octonions"**，*Bulletin of the American Mathematical Society* 39 (2002)；网上亦可免费阅览。一篇精彩的综述；引言部分现在就读得懂。
- **Andrew Hanson, *Visualizing Quaternions***（Morgan Kaufmann）。讲述以四元数处理旋转，并介绍其在电脑图像方面的应用。

完整的引导式解答见第 6.7 节：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/quaternions.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com