6.6 子群的并集

工作纸

题目

STEP II 1988，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s2-q9

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　若 K 是子群，$a \in K$ 但 $b \notin K$，那么 ab 可以属于 K 吗？

阶段 1 两个子群（subgroup）无法覆盖

涵盖：两个子群

想一想 假设 G_1 和 G_2 都不是整个 G。选取 $a \notin G_1$ 和 $b \notin G_2$。那么 a 和 b 必定分别在哪里?

停一停，试一试 现在考虑 ab。它必在 G_1 或 G_2 之中。在每一种情况下，把 a 或 b 写成该子群中元素的乘积。

阶段 2　三个子群则可以

涵盖：三个子群

> **停一停，试一试**　试找一个细小的群，其中每个元素都是自己的逆元（inverse）。它有哪些含两个元素的子群？

背后的数学

对称的语言

群在十九世纪同时从几个方向出现：伽罗瓦（Galois）对多项式的根的置换（permutation）的研究（Section 6.4）、柯西（Cauchy）关于置换的工作，以及几何学和晶体学中对对称的研究。上文那个抽象定义，即凡满足三条公理的东西都是群，到该世纪末已经确立。它的威力在于一般性：由公理证明的定理，例如本题中的那一个，同时适用于由数、矩阵、对称和置换构成的各种群。今天群无处不在：在粒子物理学中（标准模型建基于对称群）、在化学中（分子的对称性决定光谱）、在密码学中（椭圆曲线群，Section 1.9），以及在扭计骰（Rubik's cube）的解法之中。

要用多少个子群？

这道题引出一个自然的问题：最少要多少个真子群，它们的并集才是整个群？根据本题，这个数目永远不会是 2。1926 年，Gaetano Scorza 证明了一个群是三个真子群的并集，当且仅当它以克莱因四元群为“商群”（quotient）。1994 年，J. H. E. Cohn 研究了一般的问题，并提出了若干猜想；1997 年，M. J. Tomkinson 证明了没有任何群的这个最小数目是七，尽管由 3 到 6 的每个数都会出现。这类问题叙述简单，却出奇地微妙，正是群论的典型。

向量空间

类似的论证可以证明，实数上的向量空间（vector space）（例如平面或三维空间）永远不可能是有限多个真子空间（proper subspace）的并集：平面不是有限多条通过原点的直线的并集。但在有限域（finite field）上却可以：两个元素的域上的平面，其实又是克莱因四元群，它正是其三条直线的并集。

延伸练习

1 **验证这个群。**写出克莱因四元群的乘法表，并验证各条群公理。证明它与乘法下的群 $\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$ 并不相同。（提示：哪些元素是自己的逆元?）

2 **循环群。**若一个群的每个元素都是某一个元素 g 的幂，则称它为*循环群*（cyclic group）。证明循环群永远不是真子群的并集，不论用多少个。（提示：哪个子群包含 g?）

3 **整数。**直接证明 $(\mathbb{Z}, +)$ 不是子群 $2\mathbb{Z}$（偶数）和 $3\mathbb{Z}$（3 的倍数）的并集。它是否某两个真子群的并集?

4 **平面上的直线。**较难证明平面 $\mathbb{R}^2$ 不是有限多条通过原点的直线的并集。（提示：每条直线除原点外，最多只包含抛物线 $y = x^2$ 上的一个点。）

延伸阅读

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***（Springer）。一本插图精美的入门教材，以几何例子带动全书。
- **Nathan Carter, *Visual Group Theory***（Mathematical Association of America）。用图像讲解群，最适合在入读大学前阅读。
- **Peter Neumann, Gabrielle Stoy & Edward Thompson, *Groups and Geometry***（Oxford University Press）。牛津大学一年级的经典教材。

完整的引导式解答见第 6.6 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/subgroup-unions.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com