6.4 解四次方程

工作纸

题目

STEP III 2017，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s3-q3

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　把四件物件 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 分成两对，共有多少种分法？

阶段 1 缺少的系数（coefficient）

涵盖：求 A

想一想 把 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 分成两对，共有多少种分法?

停一停，试一试 在 $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$ 中，各根（root）之和是甚么? 另外，$\alpha\beta + \gamma\delta$, ...这三个量之和，用四次方程（quartic）的系数表示又是甚么?

阶段 2　具体的三次方程（cubic）

涵盖：第 (i) 部分

想一想　代入 $p=0$、$q=3$、$r=-6$、$s=10$。试试常数项（constant term）的细小因数（divisor）。

阶段 3　根的配对

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试　$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$ 等于全部六个两根乘积之和减去其中一个。另外，$\alpha\beta\cdot\gamma\delta$ 是甚么？

阶段 4 **解四次方程**

涵盖：第 (iii) 部分

> **停一停，试一试** 你已经知道 $\alpha+\beta$ 与 $\gamma+\delta$ 的和与积。要判断哪个是哪个，可把三根乘积之和用 $\alpha\beta$、$\gamma\delta$、$\alpha+\beta$ 和 $\gamma+\delta$ 表示，再利用 r。

背后的数学

这个窍门为何行得通：根的置换

1770 年，拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange）追问三次和四次方程的解法为何行得通，并在根的置换（permutation）中找到了答案。四个根共有 24 种重新排列的方式。在所有这些排列之下，三个量 $y_1=\alpha\beta+\gamma\delta$、$y_2=\alpha\gamma+\beta\delta$、$y_3=\alpha\delta+\beta\gamma$ 只不过是彼此对调：四个根的每一种重新排列，都引致三种配对的一种重新排列（图 6.4.1）。所以它们满足一个 3 次多项式，其系数是各根的对称式。用现代的语言来说，从对称群（symmetric group）S_4（全部 24 个置换）到 S_3（三种配对的 6 个置换）有一个满射的群同态（group homomorphism），这就是四次方程可以化约为三次方程的原因。

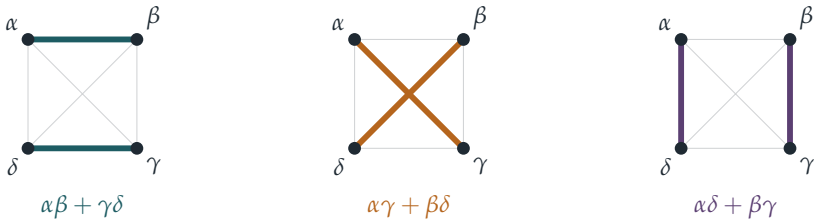

图 6.4.1 把四个根分成两对的三种方式，以及预解三次方程中与之对应的根。$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 的任何重新排列，都只会令这三幅图彼此置换，这就是为甚么那三个量满足一个三次方程，而其系数可以用四次方程的系数表示。

五次方程

对于五个根，拉格朗日尝试寻找一个类似的量，使它在根的置换之下只取寥寥几个值，却找不到有用的。1799 年鲁菲尼（Paolo Ruffini）提出证明，1824 年阿贝尔（Niels Henrik Abel）把证明补全，两人证明了：只用四则运算和根式（radicals），并不存在五次方程的一般求根公式。数年之后，伽罗瓦（Évariste Galois）确切地说明了哪些多项式可以用根式求解：就是那些根的对称群能以某种特定方式分解成较简单部分的多项式。对称群 S_4 可以这样分解（经由 S_3 和更小的群），但 S_5 不可以，因为它包含一个大小为 60 的“单”（simple）部分，无法再进一步分解。1832 年，伽罗瓦在决斗中丧生，年仅二十岁；决斗前一晚，他才匆匆把自己的理论写下来。这套理论如今是数学学位课程中的瑰宝之一，通常在三年级学到。

解三次方程

三次方程本身也可以用类似的窍门求解：把一个缺二次项的三次式（depressed cubic）$x^3 - 3px + q$ 写成两个完全立方的组合，从而化约为一个二次方程。这就是练习中那道 2011 年题目所用的方法，它与卡尔达诺公式（Cardano's formula）等价。当三次方程有三个实根时，这条公式在运算途中仍然需要用到复数（complex numbers），正是这个现象迫使数学家认真看待复数（见第 5 章的引言）。

延伸练习

1 **验证三次方程。**验证 $y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = pr - 4s$，其中 $y_1 = \alpha\beta + \gamma\delta$，余类推。（展开并利用 $\sum\alpha = -p$、$\sum\alpha\beta\gamma = -r$、$\alpha\beta\gamma\delta = s$。）

2 **把三次式写成立方之和。**试做 STEP III 2011, 第 3 题（step.maths.org/questions/11-s3-q3）。这道题把三次式写成两个立方的组合来求解，与本节的路线截然不同。请用数值方法核对它的答案。

3 **另一个四次方程。**用本节的方法解 $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = 0$。（预解三次方程有一个根是细小的整数。）

4 **数算置换。**在 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 的 24 个置换中，找出所有把配对 $\{\alpha\beta, \gamma\delta\}$ 变回自身的置换。证明这样的置换共有 8 个。（它们构成 S_4 的一个子群（subgroup）。）

延伸阅读

- **Mario Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved***（Simon & Schuster）。五次方程的故事与群论的诞生，适合一般读者。

- **Ian Stewart, *Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry***（Basic Books）。从巴比伦人的方程讲到伽罗瓦，再到其后的发展。
- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）。大学本科教科书，其历史导论所涵盖的正是本节的内容。

完整的引导式解答见第 6.4 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/quartic.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com