6.3 以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 为根的多项式

工作纸

题目

STEP II 2023，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　要找一个以 $\sqrt{2}$ 为根的多项式，你会把 $x=\sqrt{2}$ 平方，从而消去平方根。若有两个不同的平方根，怎样才能逐一消去？

阶段 1　两个平方根（square root）

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　展开 $(x-\sqrt{2})^2=3$。把余下的平方根单独留在等号一边，然后两边平方。

阶段 2 三个平方根

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 设 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$，则 $x-\sqrt{5}$ 是 f 的一个根（root）。

停一停，试一试 把 $\mathrm{f}(x-\sqrt{5})=0$ 写成 $P(x)+\sqrt{5}\,Q(x)=0$ 的形式。然后把 $\sqrt{5}$ 单独留在等号一边，再两边平方。

阶段 3　一个三次式（cubic）与一个平方根

涵盖：第 (iii) 部分

想一想　若 $x = a + \sqrt{2}$，则 $x - \sqrt{2}$ 是 $t^3 - 3t + 1$ 的一个根。代入后，把各项按是否含有 $\sqrt{2}$ 分成两组，然后两边平方。

阶段 4　两个立方根（cube root）

涵盖：第 (iv) 部分

停一停，试一试　平方并不能消去立方根。设 $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$，然后利用 $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$ 把两边立方。还剩下甚么？又该如何把它消去？

背后的数学

域及其次数

所有形如 $p + q\sqrt{2}$（其中 p、q 为有理数）的数所组成的集合 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，对加、减、乘、除（除数不为零）都封闭：它是一个域（field）。它是 $\mathbb{Q}$ 上的二维“向量空间”（vector space），以 $1, \sqrt{2}$ 为基底（basis），所以我们说它在 $\mathbb{Q}$ 上的次数（degree）是 2。添加 $\sqrt{3}$ 便得到

$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$，其基底为 $1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$，次数为 4；再添加 $\sqrt{5}$，次数便是 8（图 6.3.1）。*塔定律*（tower law）指出，沿着一座域塔往上，次数会相乘。由一个数生成的域，其次数等于该数的*最小多项式*（minimal polynomial）的次数，即该数所满足的有理系数多项式之中次数最低的一个。可以证明，本题的多项式 f 和 g 都是最小多项式，所以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的次数是 4，而 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 的次数是 8：事实上，单凭 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 这一个数，就足以生成整个 8 次域。

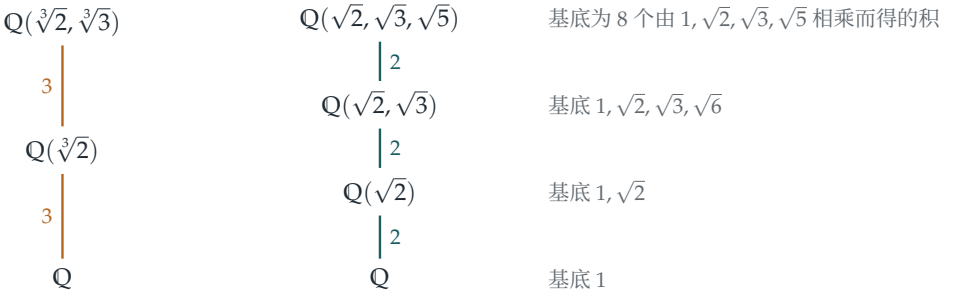

图 6.3.1 域塔。右：每添加一个平方根，次数便加倍，得出 $2\times2\times2=8$，即 g 的次数。左：每添加一个立方根，次数便变为三倍，得出 $3\times3=9$，即 k 的次数。沿着域塔往上，次数会相乘；这条*塔定律*正是证明某些尺规作图不可能完成的关键。

倍立方

尺规作图（ruler-and-compass construction）所能作出的长度，只限于由有理数出发、反复解一次和二次方程而得到的数。每一步都给出一个次数为 1 或 2 的域扩张，所以根据塔定律，每个可作图（constructible）的长度都位于一个次数为 2 的幂的域之内，而它本身的次数也是 2 的幂。但 $\sqrt[3]{2}$ 的最小多项式是 x^3-2，次数为 3。由于 3 不是 2 的幂，$\sqrt[3]{2}$ 不可作图，因此约于公元前 430 年提出的提洛岛（Delos）问题，即用尺规把立方体的体积加倍，是不可能做到的。旺策尔（Pierre Wantzel）在 1837 年证明了这一点，同时证明了一般的角不可能三等分，并完成了可作图正多边形的分类（Section 6.2）。两千年来的种种尝试，就此被一个关于次数的论证画上句号。

代数数构成一个域

本题的方法通过例子说明，代数数之和仍是代数数。一般情况则要用线性代数（linear algebra）来证明：若 α 和 β 的次数分别为 m 和 n，则所有 $\alpha^i\beta^j$（其中 $i<m$，$j<n$）这些数所张成的空间，维数至多为 mn，于是 $mn+1$ 个幂 $1,\alpha+\beta,(\alpha+\beta)^2,\ldots$ 必定线性相关（linearly dependent），由此得出一个次数至多为 mn 的多项式。我们得到的次数 $4=2\times2$、$6=3\times2$ 和 $9=3\times3$ 与这个规律完全吻合。*不是*代数数的数称为*超越数*

（transcendental number）；e 和 π 都是例子（分别由埃尔米特（Hermite）于 1873 年及林德曼（Lindemann）于 1882 年证明），而林德曼关于 π 是超越数的定理，也证明了化圆为方同样不可能。

延伸练习

1 **本原元（primitive element）。**设 $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$。证明 $y^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$，并由此推出 $\sqrt{2} = \frac{1}{2}(y^3 - 9y)$。因此每个形如 $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} + s\sqrt{6}$ 的数都可以写成 y 的多项式。

2 **混合根式。**求一个次数为 6 的整数系数多项式，使它以 $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ 为根。

3 **不可约性（irreducibility）。**证明 $x^4 - 10x^2 + 1$ 没有有理根，而且不能写成两个整数系数二次式的积。（提示：试用 $(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c)$。）由此推出 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 的次数是 4。

4 **三等分角。**证明 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$，并由此推出 $\cos 20^\circ$ 是 $8x^3 - 6x - 1 = 0$ 的根。假设这个三次方程没有有理根（请自行验证），解释为何不能用尺规把 60° 的角三等分。

延伸阅读

- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）。讲述域扩张、塔定律及古典作图问题，为大学本科生而写。
- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。第 3 章证明古希腊几大问题不可能解决，毋须任何预备知识。
- **Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond***（Springer）。以近世代数处理尺规作图。

完整的引导式解答见第 6.3 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/field-extensions.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com