6.2 高斯的正十七边形

工作纸

题目

STEP II 1991，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s2-q4

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　为甚么一道关于正 17 边形的题目，第一部分却是关于 $\cos\frac{2\pi}{5}$ 的？

阶段 1 正五边形

涵盖：第一部分，$\phi = \frac{2\pi}{5}$

想一想 展开 $y^2 = (\cos\phi + \cos 2\phi)^2$，再利用 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\big(\cos(A+B) + \cos(A-B)\big)$ 把每个乘积化为和。

停一停，试一试 利用 $5\phi = 2\pi$ 化简 $\cos 3\phi$ 和 $\cos 4\phi$。二次方程（quadratic）的两个根之中，哪一个才是所求的?

阶段 2　十七次单位根之和为零

涵盖：$\theta = \frac{2\pi}{17}$ 时各余弦之和

想一想　$\sum_{k=0}^{16} \cos k\theta$ 是以 $\omega = e^{\mathrm{i}\theta}$ 为公比的等比级数（geometric series）的实部（real part）。这个级数的和是多少？

停一停，试一试　利用 $\cos(17-k)\theta = \cos k\theta$ 把各项配对。

阶段 3 把余弦分成两组

涵盖：z 的值

想一想 设 z' 为其余四个余弦之和，即 $\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta$。$z + z'$ 是多少？

停一停，试一试 计算 zz'：把它展开成 16 个乘积，将每个乘积化为两个余弦，再化简各个角。$\cos\theta, \ldots, \cos 8\theta$ 各出现多少次？

阶段 4　二次方程

涵盖：z 的值

> **想一想**　z 和 z' 是某个二次方程的两个根。哪一个根是 z？试估计 z 中四个余弦的值。

背后的数学

高斯周期

为甚么是 $\{1,2,4,8\}$？以 17 为模（modulo），3 的幂 $3^0, 3^1, 3^2, \ldots$ 会走遍所有非零剩余（residue）：

$$1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6.$$

每隔一个取一个，即 $3^0, 3^2, 3^4, \ldots$，得出 1、9、13、15、16、8、4、2，以 17 为模就是 ±1、±2、±4、±8：正好是 z 中的角。另一半给出 $\pm3, \pm5, \pm6, \pm7$，即 z' 中的角。高斯把 ω^k 在这类剩余类上的和称为周期（periods）。由于 $17 - 1 = 16 = 2^4$，这些剩余可以对分四次，而在每一阶段，周期都满足一些二次方程，其系数涉及上一阶段的周期。四条二次方程，也就是四个平方根，就从有理数一路通往 $\cos\frac{2\pi}{17}$：

$$\cos\tfrac{2\pi}{17} = \tfrac{1}{16}\Big(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\Big).$$

每一步都只涉及平方根，而平方根可以用尺规作出（利用相似三角形或半圆），所以正 17 边形是可作图（constructible）的。

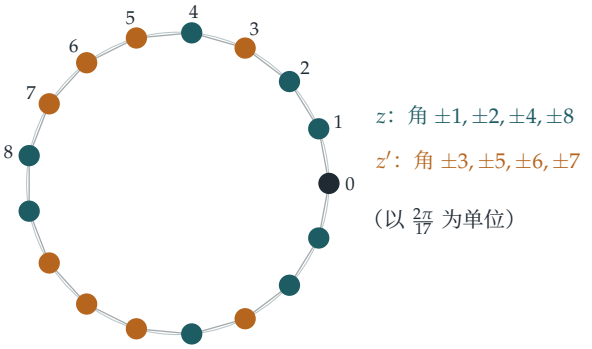

图 6.2.1 正 17 边形的顶点，按高斯的两个周期分成两组。蓝绿色顶点位于角 $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$（以 $\frac{2\pi}{17}$ 为单位），它们的 x 坐标之和是 $2z = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$；琥珀色顶点则给出 $2z' = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$。

哪些正多边形可以作图?

高斯断言，而 Pierre Wantzel 在 1837 年证明：正 n 边形可以用尺规作出，当且仅当 n 是 2 的幂乘以若干个互不相同的*费马质数*（Fermat primes）之积，费马质数即形如 $2^{2^m}+1$ 的质数。已知的费马质数有 3、5、17、257 和 65537，它们是 Section 1.1 中的费马数。（费马（Fermat）猜想所有这类数都是质数，但欧拉（Euler）证明了 $2^{32}+1$ 可被 641 整除，而此后再没有人找到其他费马质数。）所以正 257 边形和正 65537 边形都可以作图；十九世纪时，Johann Hermes 花了大约十年时间推算出正 65537 边形的作图法，他的手稿现存于哥廷根。正 7 边形和正 11 边形不可作图，因为 7 和 11 不是费马质数（$7-1=6$ 和 $11-1=10$ 都不是 2 的幂）；正 9 边形也不可作图，因为 $9=3^2$ 把费马质数 3 重复了。Wantzel 的证明用到 Section 6.3 中关于域次数（field degrees）的理论。

延伸练习

1 **正七边形（heptagon）。**试做 STEP II 1995，第 6 题（step.maths.org/questions/95-s2-q6）。这道题把高斯将单位根分组的想法用于七次单位根，并求出余弦之和与正弦之和的准确值。判断正弦之和的正负号是当中最微妙的一步。

2 **正五边形。**证明 $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$，并由此描述一个正五边形的尺规作图法。

3 **另一个周期。**用数值验证 $z' = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$。

4 **生成元（generators）。**证明以 17 为模时，3 的幂给出所有非零剩余，但 2 的幂却不然。2 的幂给出哪些剩余?

延伸阅读

- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）。当中有一章讲述尺规作图和正 17 边形。
- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。第 3 章以浅白优美的笔触介绍作图问题，包括正 17 边形。
- **Daniel Kehlmann, *Measuring the World***（Quercus）。一本关于高斯和洪堡（Alexander von Humboldt）的诙谐小说，可作轻松读物。

完整的引导式解答见第 6.2 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/gauss-17gon.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com