5.8 圆盘中隐藏的距离

工作纸

题目

STEP III 2013，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s3-q6

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　怎样从图形看出 $|z-w| \le |z| + |w|$？（把 z 和 $-w$ 想成向量。）

阶段 1 展开模

涵盖：第 (i) 部分

想一想 利用 $|a|^2 = aa^*$。展开 $|z-w|^2 = (z-w)(z^*-w^*)$，再与 $(|z|+|w|)^2$ 比较。

停一停，试一试 为甚么 E 是实数？要证明 $E \geq 0$，可利用三角不等式（triangle inequality）。

阶段 2 第二个恒等式

涵盖：第 (ii) 部分

> **想一想** 用同样的方法展开 $|1 - zw^*|^2$。

阶段 3 不等式

涵盖：最后的不等式，以及 $|z|<1$、$|w|<1$ 的情况

想一想 设 $A=(|z|+|w|)^2$ 及 $B=(1+|zw|)^2$。根据第 (i) 及第 (ii) 部分，把不等式两边平方后，即得 $\frac{A-E}{B-E}\leq\frac{A}{B}$。这在甚么情况下成立?

停一停，试一试 把 $1+|z||w|-|z|-|w|$ 因式分解（factorise）。它在甚么情况下非负？这是否也涵盖了 $|z|<1$ 且 $|w|<1$ 的情况?

背后的数学

非欧几里得几何

两千年来，数学家一直试图由欧几里得的其他公理，证明他的第五公设（过直线外一点，恰好有一条直线与该直线平行）。在 1820 和 1830 年代，罗巴切夫斯基（Nikolai Lobachevsky）、鲍耶（János Bolyai）和（私下研究的）高斯（Gauss）意识到这是办不到的：存在一种完全相容的几何，其中有无限多条平行线。1882 年，庞加莱（Henri Poincaré）在单位圆盘内找到了这种几何的一个优美模型。点就是开圆盘内的点；“直

线”是直径，以及与边界圆成直角相交的圆弧；而 z 与 w 之间的距离是

$$d(z,w) = 2\tanh^{-1}\rho(z,w), \qquad \text{其中} \qquad \rho(z,w) = \frac{|z-w|}{|1-zw^*|}.$$

当一点趋近边界圆时，它与圆心的距离趋向无限大：这个圆盘是一整个无限的平面，只是通过一块令影像变形的透镜来观看。

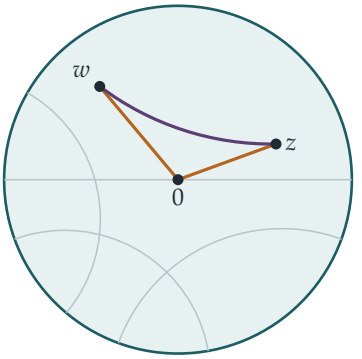

图 5.8.1　庞加莱圆盘（Poincaré disc）。双曲“直线”是直径，或与边界成直角相交的圆弧（灰色）。以 0、z 和 w 为顶点的双曲三角形，有两条边沿着直径（琥珀色），一条边沿着圆弧（紫红色）。题目中的不等式说明，以双曲距离计算，紫红色的边不会比另外两条边加起来更长。

乔装了的三角不等式

对于 $|z|, |w| < 1$，题目所证明的其实是以下结果。设 $|z| = \tanh a$ 和 $|w| = \tanh b$，则由 0 到 z 和 w 的双曲距离分别是 $2a$ 和 $2b$。根据 Section 3.8 中 tanh 的加法公式，

$$\frac{|z|+|w|}{1+|zw|} = \frac{\tanh a + \tanh b}{1+\tanh a \tanh b} = \tanh(a+b).$$

所以该不等式就是 $\tanh\left(\frac{1}{2}d(z,w)\right) \le \tanh(a+b)$，即

$$d(z,w) \le 2a + 2b = d(z,0) + d(0,w).$$

这就是双曲距离的三角不等式（图 5.8.1）。相对论的速度相加公式与双曲几何，骨子里是同一回事：狭义相对论中所有可能速度组成的集合，配上适当的距离概念，就是一个双曲空间。我们会在 Section 7.6 再谈这一点。

圆盘的对称

为甚么 ρ 是合适的量？对于 $|a| < 1$，映射 $z \mapsto \dfrac{z-a}{1-a^*z}$ 把单位圆盘映到自身，保持双曲距离不变，并把 a 移到圆心。它们是平移在双曲几何中的对应物，而 $\rho(z,w)$ 正是把 w 移到

圆心时的 |映射后的z|。这些莫比乌斯变换（*Möbius transformation*）是复分析（complex analysis）的核心课题。艾雪（M. C. Escher）的木刻版画《圆极限》（*Circle Limit*），灵感来自数学家考克斯特（H. S. M. Coxeter）的一幅图；画中以全等的鱼和天使镶嵌（tiling）庞加莱圆盘，它们愈近边缘便愈小，因为双曲距离在那里会无限增大。

延伸练习

1 **数值验算。**取 $z = \frac{1}{2}$ 和 $w = -\frac{1}{2}$。计算不等式的两边。然后计算双曲距离 $d(z,0)$、$d(0,w)$ 和 $d(z,w)$，并验证三角不等式在这里取等号。为甚么？

2 **混合的情况。**求满足 $|z| < 1 < |w|$ 的 z、w，使不等式不成立。

3 **等距映射（isometry）。**设 $f(z) = \dfrac{z-a}{1-a^*z}$，其中 $|a| < 1$。证明当 $|z| = 1$ 时必有 $|f(z)| = 1$，并且 $f(a) = 0$。证明 $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z,w)$。

4 **无限近在咫尺。**证明由 0 到 r（其中 $0 < r < 1$）的双曲距离是 $\ln \frac{1+r}{1-r}$，并且当 $r \to 1$ 时它趋向无限大。一点要多接近边界，才会与圆心相距双曲距离 10？

延伸阅读

- **Caroline Series, “Hyperbolic geometry” lecture notes**（华威大学 University of Warwick，可免费取得）。一份清晰的入门课程讲义，由庞加莱圆盘讲起。
- **Jeremy Gray, *Ideas of Space***（牛津大学出版社 Oxford University Press）。由欧几里得到爱因斯坦（Einstein）的非欧几里得几何史。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（牛津大学出版社 Oxford University Press）。第 6 章讲述非欧几里得几何和莫比乌斯变换，并配有精美的插图。

完整的引导式解答见第 5.8 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/poincare-disc.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com