5.7 作为映射的复指数函数

工作纸

题目

STEP II 1997，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s2-q5

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　$z = e^{u}(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ 的模（modulus）和辐角（argument）用 u 和 v 表示是甚么？

阶段 1 **求解** $e^w = \mathrm{i}e$

涵盖：当 $z = \mathrm{i}e$ 时求 w

想一想 以 u 和 v 表示，$z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ 的模(modulus)和辐角(argument)分别是甚么？

停一停，试一试 $\mathrm{i}e$ 的模和辐角分别是甚么？共有多少个解？

阶段 2　格线的像

涵盖：直线 $u =$ 常数和 $v =$ 常数的像（image）

> **想一想**　在直线 $u = c$ 上，甚么保持不变，甚么会变化？在直线 $v = d$ 上又如何？

阶段 3 一一对应的部分

涵盖：两对子集

想一想 哪些点 w 会被映射到第一象限（first quadrant）内？为甚么这个集合太大，无法与该象限构成一一对应（one-to-one correspondence）？

停一停，试一试 对于 $0 < |z| < 1$：你需要 u 取哪些值？每个辐角都必须恰好取到一次，那么 v 的区间应该有多长，又应该包含哪些端点？

背后的数学

复对数

在实数线上，ln 是 exp 的反函数。在复平面上，对每一个 $z \neq 0$，方程 $e^w = z$ 都有无穷多个解 w，彼此相差 $2\pi i$ 的倍数，所以 “$\log z$” 并不是单独一个数。要得到一个真正的函数，就必须选定一个分支（branch），也就是选定一条像 W_3 或 W_4 那样的带状区域：主分支（principal branch）取 $-\pi < \arg z \leq \pi$。每一个分支都必然在某处有跳跃，跳跃发生在由原点出发的一条射线上，这条射线称为分支割线（branch cut）。黎曼（Bernhard Riemann）在 1851 年的博士论文中提出了解决办法：不再坚持对数函数要定义在一个

平面上。它其实定义在一道无穷的螺旋楼梯上，即一个**黎曼曲面**（Riemann surface）；在这个曲面上，对数函数是单值而且光滑的。时至今日，黎曼曲面在几何、数论和弦论中都占有核心地位。

角度保持不变

再看一次图 5.7.1（见网上该节的完整版）。铅垂和水平的格线相交成直角，它们变成的圆和射线也是如此。这并非巧合：凡是复函数的导数不为零之处，该函数都会保持曲线之间的夹角不变。这样的映射称为**保角**（conformal）映射。在局部范围内，保角映射不过是一次旋转加上一次缩放，而这正是乘以复数 $f'(z)$ 所起的作用。保角映射可用来解决流体流动、静电学和热传导的问题，方法是把一个复杂的区域变换成一个答案已知的简单区域。

麦卡托地图

这里有一个意想不到的发现，把本节与 Section 4.8 连系起来。麦卡托（Gerardus Mercator）在 1569 年绘制的地图，设计的目的是令罗盘方位恒定的航线成为一条直线，这就要求地图保持角度不变。如果你先把地球以球极投影（stereographic projection）的方式（从北极出发）投影到一个平面上，然后取复对数，所得的结果恰好就是麦卡托投影：经线变成铅垂线，纬线变成水平线，正如射线和圆在 log 之下变成水平线和铅垂线一样。把本节的指数映射倒过来运行，就是航海图背后的数学。

延伸练习

1. **解方程。**求所有满足 $e^w = -1$ 的复数 w，以及所有满足 $e^w = 1 + \mathrm{i}$ 的 w。
2. **正方形的像。**求顶点为 0、1、$1 + \mathrm{i}$ 和 i 的正方形在 $z = e^w$ 之下的像，并画出草图。
3. **直角。**直接证明圆 $|z| = e^c$ 与射线 $\arg z = d$ 相交成直角，并解释为甚么这与直线 $u = c$ 和 $v = d$ 互相垂直是一致的。
4. **平方。**设 c 和 d 为非零实数。求直线 $x = c$ 和 $y = d$ 在映射 $z \mapsto z^2$ 之下的像。证明它们都是抛物线，并且凡相交之处都相交成直角。（若 $c = 0$ 或 $d = 0$，情况会怎样?）

延伸阅读

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 2 章和第 4 章以精彩的插图讲解指数函数、对数函数和保角映射。

- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis***（Oxford University Press）。一本清晰易懂的大学本科入门教材。
- **Ian Stewart & David Tall, *Complex Analysis***（Cambridge University Press）。另一本出色的本科入门书，着重几何观点。

完整的引导式解答见第 5.7 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/complex-exponential.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com