5.6 费马点

工作纸

题目

STEP III 2000，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s3-q3

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　A、B 和 C 在哪里？它们的辐角（argument）是多少？OA、OB 和 OC 彼此之间的夹角是多少？

阶段 1 关键恒等式（identity）

涵盖：恒等式

? **想一想** α^3 是甚么？把 z^3+1 因式分解（factorise），并利用 $\alpha \neq -1$。

? **想一想** A、B 和 C 在哪里？求出它们的辐角（argument）。

阶段 2　以旋转（rotation）看等边三角形（equilateral triangle）

涵盖：顶点（vertices）N、L 和 M

想一想　三角形 CAN 是等边三角形，顶点按顺时针方向标示。站在 C 点，怎样由 A 走到 N？试以 $A-C$ 表示 $N-C$。

停一停，试一试　顺时针旋转 60° 即是乘以 $e^{-\mathrm{i}\pi/3}$。先以 α 表示它，再用同样方法求出 L 和 M，并利用恒等式化简。

阶段 3 通过原点（origin）的三条直线

涵盖：三条直线

> **停一停，试一试** 比较 L 与 C：两者都是同一个复数（complex number）的实数倍（real multiple）。各个倍数的正负号说明了甚么？对 M 与 A，以及 N 与 B，也作同样的比较。

背后的数学

为甚么费马点使距离最小

为甚么 $PA + PB + PC$ 会在各边所对的角均为 120° 的那一点取得最小值？以下是一个精彩的论证。把整幅图绕 B 旋转 60°，把 A 送到 L'（即 AB 上等边三角形的顶点），把 P 送到 P'。三角形 BPP' 是等边三角形，所以 $PB = PP'$，而且 $PA = P'L'$。于是 $PA + PB + PC = L'P' + P'P + PC$，这是一条由 L' 到 C 的路径的长度。它至少等于 $|L'C|$，而等号恰好在路径成一直线时成立，这种情况出现于 P 处的各个角均为 120° 之时。所以总长度的最小值是 $|LC| = p + q + r$，与题目所得的结果一致。（这个论证成立的前提是三角形的每个角都小于 120°；否则最小值会在钝角的顶点取得。）

肥皂膜与斯坦纳树

把一个装有三根小钉（代表 A、B、C）的框架浸入肥皂水中：肥皂膜会令其表面张力能量减至最小，形成三面薄壁，在费马点以 120° 相交。若有更多的点，最短的连接网络是一棵斯坦纳树（Steiner tree），其中有额外的交汇点，每个交汇点都有三条边以 120° 相交。一般而言，求斯坦纳树在计算上十分困难（这是一个 NP 困难（NP-hard）问题），但它们在实际应用中相当重要，例如设计道路网络、管道网络以及电脑晶片上的线路。

拿破仑定理

同一个图形中还藏着另一件瑰宝：在任意三角形的三边上所作的三个等边三角形，它们的中心构成一个等边三角形。传统上这个结果归功于拿破仑（Napoleon Bonaparte）（他是一位热衷数学的业余爱好者），不过并无证据显示这是他发现的。这个定理同样可以用复数简短地证明，用到的正是 $1 + \alpha^2 = \alpha$。

延伸练习

1 **检查字母次序。**证明若各等边三角形的顶点按逆时针方向标记（即向内作），则三条直线一般不会通过 O。

2 **拿破仑定理。**证明等边三角形 ABL 的中心是 $\frac{1}{3}(A + B + L)$。利用上文的表达式，证明三个中心构成一个等边三角形。

3 **最小值。**取 $p = 2$，$q = 1.4$，$r = 1.1$，分别就 P 位于每个顶点以及位于形心（centroid）$\frac{1}{3}(A + B + C)$ 的情况计算 $PA + PB + PC$，并验证所得的值全部大于 4.5。

4 **等边三角形的判别法。**证明 z_1、z_2、z_3 构成等边三角形（不论方向），当且仅当 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$。

延伸阅读

- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。第 7 章讨论费马点、斯坦纳树和肥皂膜。
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***（Mathematical Association of America）。以复数证明多个几何定理，程度正好与本节相若。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 1 章包括拿破仑定理及其他几何结果。

完整的引导式解答见第 5.6 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/fermat-point.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com