5.5 名不副实的有理角

工作纸

题目

STEP III 2022，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　假设 θ 是有理数，设 $\theta = \frac{p}{q}$ 度。试找出一个正整数 k，使得 $\sin(k\theta) = 0$。

阶段 1　倍角公式（multiple-angle formulas）

涵盖：第 (i) 部分

停一停，试一试　写出 $\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k$，并抽出因子 $\cos^k\theta$。展开 $(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^k$，再分别取虚部（imaginary part）和实部（real part）。然后利用 $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$。

阶段 2 奇偶性（parity）

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 设 $\sec\theta = a$ 为奇数，那么 $\sec^2\theta - 1$ 是奇数还是偶数?

停一停，试一试 取使 $\sin(k\theta) = 0$ 成立的最小的 k。这样，正弦公式中括号内的式子必须等于零。为甚么这会迫使 k 是偶数? 然后利用 $\sin k\theta = 2\sin\frac{k\theta}{2}\cos\frac{k\theta}{2}$。

阶段 3　矛盾（contradiction）

涵盖：第 (ii) 部分

> **停一停，试一试**　取 $m = \frac{k}{2}$，应用余弦公式。为甚么括号内的式子永远不可能等于零?

阶段 4　余切（cotangent）的版本

涵盖：第 (iii) 部分

> **想一想**　若 $\cot\phi = \frac{1}{b}$，$\sec^2\phi - 1$ 是甚么？它是偶数吗？然后套用同样的论证。

背后的数学

无理旋转

如果 θ 的度数是有理数，不断重复旋转 θ，最终会回到起点。如果 θ 是无理数，就永远不会回到起点，而且会出现奇妙的现象：各点 $k\theta$（以模 360° 计算）会均匀地散布在整个圆周上，与每一个角都可以任意接近。这就是等分布定理（equidistribution theorem），由赫尔曼．外尔（Hermann Weyl）、瓦茨瓦夫．谢尔宾斯基（Wacław Sierpiński）和

Piers Bohl 在 1910 年前后各自独立证明。图 5.5.1 显示 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 的首 40 个倍数：它们已经逐渐布满圆周，而且永远不会重复。

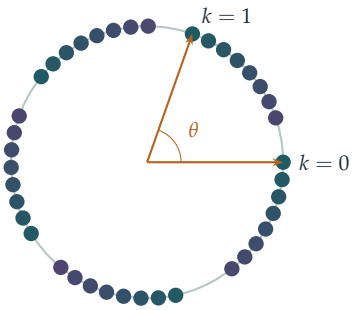

图 5.5.1 位于角 $k\theta$ 的各点，其中 $k = 0, 1, \ldots, 39$，而 $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.53°$（颜色随 k 增加由蓝绿色渐变为紫红色）。由于 θ 是无理数，没有任何一点会重复出现，而各点均匀地散布在整个圆周上。

希尔伯特第三问题

1900 年，大卫．希尔伯特为新世纪列出了二十三个问题。第三个问题是：如果两个多面体（polyhedron）体积相同，是否总可以把其中一个切成有限多块多面体，再重新拼合成另一个？（对平面上的多边形而言，答案是肯定的：这就是 Wallace–Bolyai–Gerwien 定理。）不出一年，希尔伯特的学生马克斯．德恩（Max Dehn）证明了答案是*否定*的：正四面体不能切开再重新拼合成体积相同的立方体。德恩的证明为每个多面体赋予一个由其棱长和二面角（dihedral angle）构成的量，现称为*德恩不变量*（Dehn invariant），它在切割和重新拼合之下保持不变；立方体的德恩不变量是零，而正四面体的德恩不变量不等于零，原因正是二面角 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 不是 $180°$ 的有理数倍。这恰恰就是本题所证明的事实。

尼云定理

这个结论可以推到多远？1956 年，伊凡．尼云（Ivan Niven）证明：如果 θ 的度数是有理数，而且 $\cos\theta$ 是有理数，那么 $\cos\theta$ 只能是 0、$\pm\frac{1}{2}$、± 1 其中之一。所以余弦为有理数的“漂亮”角，就只有 $0°$、$60°$、$90°$、$120°$、$180°$ 以及与它们相关的角。证明用到这个事实：$2\cos\theta$ 是某个整数系数首一多项式（monic polynomial）的根，即*代数整数*（algebraic integer），也就是 Section 1.3 末尾提到的概念。

延伸练习

1 **正四面体。**证明正四面体两个面之间的夹角是 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$，并证明甲烷分子中两条化学键（由正四面体的中心连到两个顶点）之间的夹角是 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$。

2 **3–4–5 三角形。**证明 3–4–5 三角形最小的角的度数是无理数。（提示：这个角是 $\cot^{-1}\frac{4}{3}$；可改写上述论证，或考虑高斯整数（Gaussian integer）$4+3\mathrm{i}$ 的各次幂，并证明它们全都不是实数。）

3 **为甚么 a 要是奇数？**当 $a=2$ 时，论证在哪里出了问题？$\cos^{-1}\frac{1}{2}$ 是有理数吗？

4 **尼云定理的简单情况。**找出介乎 0° 与 90° 之间、度数为整数而 $\cos\theta$ 为有理数的所有角 θ，并验证你所列的结果与尼云定理吻合。

延伸阅读

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。书中载有关于三角函数有理数值的尼云定理。
- **Martin Aigner & Günter Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，论希尔伯特第三问题的一章。对德恩的解法有精彩的阐述。
- **Benjamin Yandell, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers***（A. K. Peters）。讲述全部二十三个问题背后的故事。

完整的引导式解答见第 5.5 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/rational-angles.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com