5.4 正多边形中的距离

工作纸

题目

STEP III 2016，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s3-q7

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> ? **想一想**　把多边形的顶点放在 n 次单位根上，即 $X_k = \omega^k$。若 P 是点 z，$|PX_k|$ 用 z 表示是甚么？那么所有距离之积又是甚么？

阶段 1　因式分解（factorisation）

涵盖：因式分解

> ? **想一想**　为甚么每个 ω^k 都是 $z^n - 1$ 的根（root）？为甚么它们就是全部的根？

阶段 2 垂直平分线（perpendicular bisector）上的一点

涵盖：第 (i) 部分

想一想 把各顶点（vertex）放在 $X_k = \omega^k$。若 P 是点 z，则 $|PX_k| = |z - \omega^k|$。所有距离的乘积是甚么？

停一停，试一试 与 X_0 和 X_1 等距的点都在一条通过 O 的直线上。把 P 写成 $z = te^{i\pi/n}$，其中 t 为实数。z^n 是甚么？

想一想 当 n 是奇数时，把 $t > 0$ 和 $t < 0$ 分开处理。两种情况在几何上各代表甚么？

阶段 3 由一个顶点出发的弦（chord）

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 现在 $P = X_0$，其中一个距离是零，所以 $|z^n - 1|$ 派不上用场。哪一个多项式（polynomial）的根是 $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$，但不包括 1?

停一停，试一试 把该多项式写成 $1 + z + \cdots + z^{n-1}$，然后代入 $z = 1$。

背后的数学

科茨定理

第 (i) 部分是科茨（Roger Cotes）的一条定理。科茨是剑桥一位才华横溢的年轻数学家，曾编订牛顿（Newton）《自然哲学的数学原理》（*Principia*）的第二版，1716 年去世，年仅三十三岁（牛顿曾说：“假如他还在世，我们或许已经学到一点东西了。”）。科茨发现，若 P 位于由 O 出发、通过正 n 边形一个顶点的射线上，则 P 到各顶点的距离之积是 $||OP|^n - 1|$；若 P 位于通过某条边中点的射线上，则这个积是 $|OP|^n + 1$。他没有用到复数，就凭这个结果把 $x^n \pm 1$ 分解成实二次因式，而这正是他计算有理函数（rational function）积分时所需要的。这条定理在他去世后，于 1722 年才发表。

正弦之积

由于 $|1-\omega^k| = |e^{-\mathrm{i}\pi k/n} - e^{\mathrm{i}\pi k/n}| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$，第 (ii) 部分说的就是

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

这与 Section 5.3 中的余弦之积互相配对。另一个相关的积给出 z^n-1 的判别式（discriminant）：所有成对的相异 n 次单位根之间距离的平方，乘起来等于 n^n。判别式量度一个多项式的根彼此相隔多远，在多项式和数域（number field）的代数理论中占有核心地位，我们会在第 6 章讨论。

静电学与等距分布

这个结果还有一个物理上的解读。把 n 个相等的电荷放在一个圆上；令势能（potential energy）最小的排列（采用二维静电学的对数势）就是正多边形，而能量所涉及的正是 $\sum \ln|X_jX_k|$，即距离之积的对数。“分布得尽量疏散”的点，在数值分析（numerical analysis）中十分重要（见 Section 3.6，当中最佳的插值点是由正多边形经 $x=\cos\theta$ 得来的），在随机矩阵（random matrix）理论中亦然。

延伸练习

1. **检查小的情况。**就正方形（$n=4$）和等边三角形（$n=3$）直接验证第 (ii) 部分。

2. **通过顶点。**证明：若 P 位于由 O 出发、通过 X_0 的射线上，则 $|PX_0|\times\cdots\times|PX_{n-1}| = ||OP|^n - 1|$。

3. **平均距离。**利用第 (ii) 部分和 Section 3.2 的算术平均—几何平均不等式（AM–GM inequality），证明从 X_0 出发的 $n-1$ 条弦，平均长度至少是 $n^{1/(n-1)}$。就 $n=6$ 求出实际的平均值 $\frac{1}{n-1}\sum_k 2\sin\frac{k\pi}{n}$，并加以比较。

4. **所有的弦。**较难 证明：内接于单位圆的正 n 边形，全部 $\binom{n}{2}$ 条弦的长度之积是 $n^{n/2}$。

延伸阅读

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。用复数处理几何，插图精美。
- **Ross Honsberger, *Mathematical Gems***（Mathematical Association of America）。收录了好几道关于正多边形的精巧问题。

- **Ronald Gowing, *Roger Cotes: Natural Philosopher***（Cambridge University Press）。科茨的传记，并介绍他的数学工作。

完整的引导式解答见第 5.4 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/polygon-distances.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com