5.3 因式分解 $z^{2n}+1$

工作纸

题目

STEP III 2013，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s3-q4

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　$z^{2n}=-1$ 的解在复数平面（complex plane）上的甚么位置？试就 $n=2$ 和 $n=4$ 把它们画出来。

阶段 1　共轭对给出实二次式

涵盖：因式分解

> **想一想**　把 $(z-e^{\mathrm{i}\theta})(z-e^{-\mathrm{i}\theta})$ 展开，并化简中间一项的系数。

阶段 2 **因式分解**

涵盖：因式分解

停一停，试一试 把 $z^{2n}=-1$ 的 $2n$ 个解写成共轭对（conjugate pairs）$e^{\pm \mathrm{i}\theta_k}$。各个 θ_k 是甚么？为甚么它们已经是全部的根？

阶段 3　代入 $z=\mathrm{i}$

涵盖：第 (i) 部分

想一想　$\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}\cos\theta+1$ 等于甚么？当 n 是偶数时，$\mathrm{i}^{2n}+1$ 又等于甚么？

停一停，试一试　当 n 是偶数时，化简 $(-2\mathrm{i})^n$。

阶段 4 当 n 是奇数时

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 当 n 是奇数时，其中一个角 θ_k 等于 $\frac{\pi}{2}$。是哪一个？为甚么这样一来，直接代入 $z=\mathrm{i}$ 就毫无用处？

停一停，试一试 把因式分解的等式两边同除以 $1+z^2$，然后代入 $z=\mathrm{i}$。把余下的余弦配对：$\cos\theta_{n+1-k}$ 与 $\cos\theta_k$ 有甚么关系？

背后的数学

代数基本定理

$z^{2n}+1$ 可以在 $\mathbb{C}$ 上完全分解成线性因式，这是*代数基本定理*（fundamental theorem of algebra）的一个特殊情况：每个复系数的非常数多项式都有一个复根，因而可以完全分解成线性因式。高斯（Gauss）在 1799 年的博士论文中给出了第一个获广泛接受的证明，其后又多次重新探讨这条定理，提出新的证明。由此可推出，每个实多项式都可以分解成实线性因式和实二次因式，因为非实根以共轭对的形式出现，正如第 1 步所见。这条定理名为“代数”，实质却属于分析：每个证明都要用到实数的某种性质，例如连续性

（continuity），而你会在复分析（complex analysis）的入门课程中见到其中一个最巧妙的证明。

正弦与余弦之积

这个方法可以给出一整族恒等式。以 $z^n - 1$ 取代 $z^{2n} + 1$，就得到

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

它的几何形式在 Section 5.4 中有证明。这类恒等式会在振动系统的分析中出现（以弹簧相连的 n 个质点的频率涉及 $\sin \frac{k\pi}{2(n+1)}$），也会在计数问题中出现（某些图的生成树（spanning trees）数目，以及长方形的多米诺骨牌铺砌（domino tilings）数目，都可以用余弦之积表示）。Kasteleyn 在 1961 年提出的 $m \times n$ 长方形多米诺骨牌铺砌公式，是一个双重乘积，其中各项是含 $\cos^2 \frac{j\pi}{m+1}$ 和 $\cos^2 \frac{k\pi}{n+1}$ 的式子。

延伸练习

1 **一个七边形的乘积。**利用第 (ii) 部分，取 $n = 7$，证明 $\cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{3\pi}{14} \cos \frac{5\pi}{14} = \frac{\sqrt{7}}{8}$。然后证明 $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}$。（提示：利用 $\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ 把各角联系起来，或者反复使用恒等式 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$。）

2 **另一个代入。**在因式分解式中代入 $z = 1$，证明

$$\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{(2k-1)\pi}{4n} = 2^{\frac{1}{2}-n}.$$

3 **分解 $z^6 + 1$。**把 $z^6 + 1$ 写成三个实二次式之积，并把它们乘开以验算答案。

4 **正弦。**以类似方法分解 $z^{2n} - 1$，再除以 $z^2 - 1$，证明

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

延伸阅读

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 2 章讲述单位根（roots of unity）与多项式，配有精美的图画。
- **Benjamin Fine & Gerhard Rosenberger, *The Fundamental Theorem of Algebra***（Springer）。收录这条定理的多个证明，分别来自分析、代数和拓扑，为大学本科生而写。

- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（Princeton University Press）。一部关于 $\sqrt{-1}$ 的历史，包括单位根及其应用。

完整的引导式解答见第 5.3 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/z2n-plus-one.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com