5.2 单位根筛选法

工作纸

题目

STEP I 1990，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s1-q2

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　ω 是 $z^3 - 1 = 0$ 的一个根。试把 $z^3 - 1$ 因式分解。为甚么由此可得 $1 + \omega + \omega^2 = 0$?

阶段 1　模与辐角

涵盖：单位立方根（cube roots of unity）

想一想　由 $1 + \omega + \omega^2 = 0$ 出发，把 $1 + \omega^2$ 和 $1 + \omega$ 各自写成 ω 的单独一个幂（可相差一个正负号）。它们的模（modulus）和辐角（argument）分别是甚么?

阶段 2 筛选器

涵盖：恒等式

想一想 当 k 是 3 的倍数时，$1+\omega^k+\omega^{2k}$ 等于甚么？不是倍数时又如何？

停一停，试一试 把 $(1+\omega^r)^n$ 对 $r=1,2,3$ 加起来，每一项都用二项式定理（binomial theorem）展开。然后利用你求得的模和辐角，再计算同一个和。

阶段 3 两个计算

涵盖：$n = 25$ 的情况，以及第二个和

想一想 当 $n = 25$ 时：2π 的哪一个倍数最接近 $\frac{25\pi}{3}$？

停一停，试一试 计算第二个和时，你需要的是除以 3 后余数为 2 的位置 k。怎样把筛选器平移，才能改为挑出这些 k？

背后的数学

离散傅里叶变换

把 3 换成任意的 N，并把 ω 换成 $e^{2\pi i/N}$。对于一列数 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$，以下各数

$$\hat{a}_r = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, \omega^{rk}$$

构成它的离散傅里叶变换，而正是滤波恒等式 $\sum_r \omega^{rk} = N$ 或 0，让你可以从 $\hat{a}_r$ 还原出 a_k。这个变换把一个信号分解成它的各个频率成分。1965 年，James Cooley 和 John Tukey 发表了一种方法，只需大约 $N \log_2 N$ 步而非 N^2 步便能把它算出，这就是快速傅

里叶变换（fast Fourier transform，简称 FFT）；高斯（Gauss）早在 1805 年已发现本质上相同的想法，但从未发表。FFT 应用于音讯和图像压缩（MP3 和 JPEG）、流动电话信号、医学扫描仪，以及极大数字的乘法，并且经常获列为二十世纪最重要的算法之一。

生成函数

这个滤波器只是一个更宏大想法的其中一例：数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 可以包装成一个多项式或幂级数（power series）$A(x) = \sum a_k x^k$，称为它的*生成函数*（generating function），而对数列进行的运算就变成对函数进行的运算。在 1 处求值，就是把数列求和；在单位根处求值，就是挑出各个剩余类（residue classes）；求导则是把各项以 k 加权。这样一来，许多计数问题都化为代数问题，而这正是第 9 章的核心技巧。同一个滤波器，配合五次单位根应用于 $(1+x)^n$，便会与正五边形和黄金比（golden ratio）扯上关系；我们会在 Section 6.1 继续探讨单位根的代数。

延伸练习

1 **偶数位置。**利用二次单位根（1 和 -1）的滤波器，证明 $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$。

2 **另一个余数。**求 $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$ 的公式，并验证三条公式加起来等于 2^n。

3 **每第四个。**利用 i，证明 $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = \frac{1}{4}\left(2^n + 2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$。

4 **整除性。**$\{1, 2, \ldots, 12\}$ 有多少个子集的元素个数可被 3 整除？有多少个子集的元素之和可被 3 整除？（第二问的提示：考虑 $\prod_{j=1}^{12}(1+x^j)$ 在三次单位根处的值。）

延伸阅读

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（A. K. Peters；可于网上免费阅览）。一本引人入胜的生成函数入门书；单位根滤波器在书中很早便出现。
- **Arthur Benjamin & Jennifer Quinn, *Proofs That Really Count***（Mathematical Association of America）。以计数方法证明二项式恒等式。
- **T. W. Körner, *Fourier Analysis***（Cambridge University Press）。内容包括离散傅里叶变换和 FFT。

完整的引导式解答见第 5.2 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/roots-filter.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com