5.1 梅钦公式

工作纸

题目

STEP III 1987，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s3-q3

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　$5-\mathrm{i}$ 的辐角是甚么？$1+\mathrm{i}$ 的呢？复数相乘时，辐角会怎样变化？

阶段 1 模（modulus）的上下界

涵盖：第 (i) 部分

想一想 要证明上界（upper bound），可将两边平方。两边都是非负的。

停一停，试一试 要证明下界（lower bound），可把 $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ 看成 $(|x|, |y|)$ 与一个单位向量（unit vector）的点积（dot product）。点积最大可以有多大?

阶段 2　关键的乘法

涵盖：第 (ii) 部分：第一条公式

想一想　复数（complex numbers）相乘时，辐角（argument）相加。$5-\mathrm{i}$ 和 $1+\mathrm{i}$ 的辐角分别是甚么？然后逐步计算 $(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$。

停一停，试一试　你所得答案的辐角是甚么？利用第 (i) 部分，或各个角的大小，证明当中没有额外多出 2π 的倍数。

阶段 3 第二条公式

涵盖：第 (ii) 部分：第二条公式

> **想一想** 以此类推，哪一个复数乘积的辐角是 $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}$？把它乘开。

背后的数学

徒手计算 π

为甚么梅钦公式这样适合用来计算？级数 $\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ 在 $|x| \le 1$ 时收敛，但在 $x = 1$ 时慢得令人难受：要用 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ 求得 $\frac{\pi}{4}$ 的三位小数，大约需要一千项。取 $x = \frac{1}{5}$ 时，每一项约为前一项的 25 分之一，即每项大约带来 1.4 位小数；取 $x = \frac{1}{239}$ 时，每项约 4.8 位。梅钦的 100 位小数，只需要第一个级数约 70 项和第二个级数约 20 项。1873 年，William Shanks 用一条梅钦型公式算出 707 位，单是运算就花了多年时间；到了 1944 年，人们发现他在第 528 位出了错，其后的数字全部不对。

再谈高斯整数

形如 $a + b\mathrm{i}$ 而 a、b 为整数的数，就是 Section 1.6 的高斯整数。$5 - \mathrm{i}$ 之所以这样好用，原因在于一个因数分解（factorisation）：$239^2 + 1 = 57122 = 2 \times 13^4$，在高斯整数中写成 $(239 + \mathrm{i})(239 - \mathrm{i}) = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})\,(3 + 2\mathrm{i})^4(3 - 2\mathrm{i})^4$，而 $5 - \mathrm{i} = (1 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})$ 正是由同一批高斯质数（Gaussian primes）组成的。寻找梅钦型公式，其实就是把形如 $n^2 + 1$ 的数作因数分解的问题。1899 年，Carl Størmer 正是用这个想法证明了：形如 $\frac{\pi}{4} = a\tan^{-1}\frac{1}{m} + b\tan^{-1}\frac{1}{n}$ 而 a、b、m、n 为整数的公式只有四条，即梅钦的一条，以及欧拉（Euler）、Hermann 和 Hutton 分别发现的三条。

旋转

乘以一个模为 1 的复数，就是把平面旋转（rotation）。正因如此，凡是涉及旋转和角的事情，复数都是最自然的语言：由本章稍后的几何，到电机工程中的交流电，以至量子力学中的波函数，莫不如此。在 Section 4.2 中，$\tan^{-1}$ 的加法公式（addition formula）来自一个巧妙的代换（substitution）；在这里，它来自复数的乘法。两者其实是同一个事实，只是从不同的角度去看。

延伸练习

1 **一个近亲。**试做 STEP II 2000，第 4 题（step.maths.org/questions/00-s2-q4）。这道题用与本节相同的方法，证明另一条关于 $\frac{\pi}{4}$ 的反正切公式：把复数相乘，然后读出辐角。

2 **欧拉公式。**考虑 $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$，证明 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$。

3 **Hutton 公式。**证明 $\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$。

4 **要多少项？**估计一下，要把 π 计算到小数点后 20 位，梅钦公式中的两个级数各需要多少项。然后用计算机实际算出最初几位。

延伸阅读

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。书中载有梅钦型公式的历史。
- **Jörg Arndt & Christoph Haenel, *Pi Unleashed***（Springer）。生动地介绍古今各种计算 π 的方法。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。要从几何角度理解复数，这是最好的一本书。第 1 章讲的就是乘法即旋转加缩放。

完整的引导式解答见第 5.1 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/machin.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com