4.9 Holditch 定理

工作纸

题目

STEP III 2011，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s3-q5

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　先在最简单的情况下检验这个定理。若 C 是半径为 R 的圆，P 描出的是甚么曲线？环形的面积是多少？

阶段 1　由坐标求面积

涵盖：面积公式

> **想一想**　设 $x = r\cos\theta$ 及 $y = r\sin\theta$，全部都是 t 的函数，求 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$，并计算 $x\dot{y} - y\dot{x}$。

阶段 2 杆的两端

涵盖：A 和 B 的坐标（coordinates）

? **想一想** 杆由 A 到 B 指向 $(\cos t, \sin t)$ 的方向。P 与两端的距离各是多少？

阶段 3　OA 扫过的面积

涵盖：OA 扫过的面积（area swept）

想一想　把 $(*)$ 应用于 A。展开 $x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A$，并按 a 的幂次把各项分组。

停一停，试一试　把每组的项由 0 积分（integrate）至 2π。至于 $[B]$：把 A 的公式中的 a 换成甚么，便得到 B?

阶段 4 **消去 f**

涵盖：$\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 之间的面积

> **停一停，试一试** A 和 B 都沿同一条曲线 $\mathcal{C}$ 走了一圈。由此可知 $[A]$ 与 $[B]$ 有甚么关系？利用这一点求 f。

背后的数学

格林定理与求积仪

公式 $(*)$ 是*格林定理*（Green's theorem）的特殊情况；格林定理把沿闭曲线的积分与曲线内区域上的积分联系起来。它的面积形式指出，曲线所包围的面积是 $\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$，这个积分只需沿边界走一圈就能算出。工程师利用这一点造出了*求积仪*（planimeter），这是十九世纪发明的一种机械仪器（其中以 Jakob Amsler 在 1854 年的设计最为成功）：用指针沿着地图或图表上某个图形的边界描一圈，一个小轮就会记录所包围的面积。求积仪曾用来量度土地面积、根据示功图（indicator diagram）计算蒸汽机所作的功，还有许多其他用途，直至被数码方法取代为止。Holditch 定理与此密切相关：那根杆就像求积仪的臂。

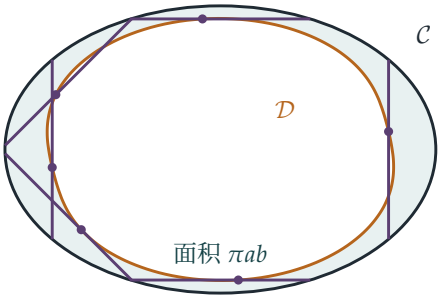

图 4.9.1　Holditch 定理的例子：椭圆的半轴（semi-axes）为 3 和 2，杆长 2.5，其中 $a = 1$、$b = 1.5$。图中画出了杆的若干位置（紫色），并标出点 P。P 所描出的曲线 $\mathcal{D}$（琥珀色）是用数值方法算出的，而两条曲线之间的阴影环形面积为 $4.7124\ldots = 1.5\pi$，与定理的预测完全吻合。

细节条款

Holditch 陈述这个定理时，对条件不大讲究，但定理其实需要一些条件。杆必须能够在两端都留在曲线上的情况下绕足一整圈，而描出的曲线 $\mathcal{D}$ 必须是只描一次的简单闭曲线（simple closed curve）；如果杆相对于 $\mathcal{C}$ 的阔度太长，$\mathcal{D}$ 可能会自相交，这时公式给出的“面积”会把某些区域计算两次，或以负号计算。题目假设 $\mathcal{D}$ 是一条包含 O 的凸曲线，从而避开了这些困难。找出定理究竟在甚么条件下成立，正好说明一个优美的想法必须经过严格化才站得住脚，这也是第 3 章的主题。

延伸练习

1 **椭圆的面积。**利用 $(*)$，取 $x = p\cos t$、$y = q\sin t$，证明半轴为 p 和 q 的椭圆面积为 πpq。

2 **圆的情况。**证明相交弦定理：若圆的两条弦相交于 P，则每条弦被分成的两段，其长度之积相等。由此推导出圆的 Holditch 定理。

3 **中点。**证明由 $f = \pi(a - b)$ 可知，当 P 是杆的中点时，$f = 0$。这时环形的面积是多少？答案以杆长 L 表示。

4 **三角形。**较难 利用 $(*)$，沿边界绕行一周，求顶点为 $(0,0)$、(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 的三角形的面积，并证明它等于 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$。这就是求任意多边形面积的“鞋带公式”（shoelace formula）的起点。

延伸阅读

- **Mark Levi, *The Mathematical Mechanic***（Princeton University Press）。以杆、轮和弹簧等物理推理来证明数学结果，与本节的精神一脉相承。
- **H. M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That***（Norton）。向量微积分（vector calculus）的非正式入门，内容包括格林定理。
- **Hamnet Holditch, "Geometrical theorem"**，*Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858)。原始的短文，只有短短一段，完全没有提及任何细节条款。

完整的引导式解答见第 4.9 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/holditch.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com