4.8 切球形面包

工作纸

题目

STEP I 2001，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s1-q6

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　半径为 a 的球，是由哪一条曲线绕 x-轴旋转而成的？该曲线的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是甚么？

阶段 1 面包皮公式的化简

涵盖：面包皮面积与切片数目成正比

想一想 哪一条曲线绕 x 轴旋转（rotate）后，会得出半径为 a 的球体（sphere）？这条曲线的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是甚么？

停一停，试一试 就这条曲线计算 $y\sqrt{1+(y')^2}$。你会发现一件奇妙的事。

阶段 2　面包皮面积与切片数目成正比

涵盖：面包皮面积与切片数目成正比

想一想　那么，一片厚度为 h 的切片，其面包皮面积是多少？这与切片所在的位置有关吗？

阶段 3 “脆皮”条件

涵盖：半径须满足的条件

想一想 按照题目的提示：从 $x = a$ 的一端开始吃切片，使余下的部分由 $x = -a$ 延伸至 $x = -a + t$。求出 V 和 A。代换（substitution）$s = x + a$ 会有帮助。

停一停，试一试 无论吃掉了多少片，这项规定都必须成立，即对所有满足 $0 < t \leq 2a$ 的 t 都成立。在这个范围内，$\frac{V}{A}$ 的最大值是多少？

阶段 4　题目之外：$2\frac{2}{3}$ 足够吗？

涵盖：题目之外

想一想　题目没有问：你求得的关于 a 的条件是否也是充分的？如果从两端同时吃切片，又会怎样？

背后的数学

阿基米德的帽盒定理

阿基米德在《论球与圆柱》（*On the Sphere and Cylinder*）中证明了：球面上夹在两个平行平面之间的环带，其面积等于这两个平面在包裹球的圆柱上所截出的环带的面积（图 4.8.1）。我们的计算正是这条帽盒定理（hat-box theorem）：半径为 a 的圆柱每单位长度的面包皮面积为 $2\pi a$，球也是如此。考虑整个球，它的表面积（surface area）等于圆柱的曲面面积，即 $2\pi a \times 2a = 4\pi a^2$。阿基米德认为，这个结果连同“球的体积是圆柱体积的三分之二”这一事实，是他毕生最出色的成就。西塞罗（Cicero）于公元前 75 年到访叙拉古（Syracuse）时，正是凭着寻找刻在墓上的球与圆柱，找到了那座杂草丛生的坟墓。

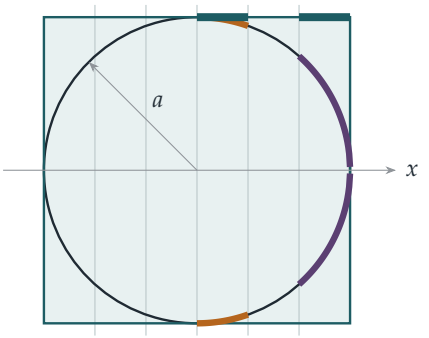

图 4.8.1 半径为 a 的球形面包置于包裹它的圆柱之内的横截面，面包被切成厚度相等的薄片。中间的薄片（琥珀色）的面包皮是一段短而接近水平的弧，离轴较远；末端的薄片（紫红色）的面包皮是一段长而陡峭的弧，离轴较近。绕 x-轴旋转后，两者的面包皮面积都恰好等于圆柱上对应环带（蓝绿色）的面积：$2\pi a$ 乘以厚度。

地球的地图

帽盒定理提供了一种绘制保持面积不变的地球地图的方法。把地球仪上的每一点沿水平方向向外投影到包裹它的圆柱上，然后把圆柱摊开。球面上的环带会映射到圆柱上面积相同的环带，而任何区域也是如此。这就是兰伯特（*Lambert*）圆柱等积投影（Lambert's cylindrical equal-area projection，1772 年）。它在两极附近会令形状严重失真，但面积是如实的，不像人们熟悉的麦卡托（Mercator）投影那样，令格陵兰看起来与非洲一样大（其实格陵兰大约只有非洲的十四分之一）。高斯（Gauss）有一条著名的定理，称为“绝妙定理”（*Theorema Egregium*，1827 年），它说明没有任何球面地图可以同时保持面积和形状：每一幅平面的地球地图都必定有所失真。

球面上的随机点

以下是一个实际的应用。要在球面上均匀（uniformly）随机地选取一点，你或许会尝试均匀地选取纬度（latitude）和经度（longitude），但这样会令点在两极附近过于密集。帽盒定理给出了正确的做法：在 $-a$ 与 a 之间均匀地选取高度 x，并在 0 与 2π 之间均匀地选取经度。由于面积与高度成正比，这样选出的点恰好是均匀分布的。物理学和电脑图像的电脑模拟都采用这个方法。（值得一提的是，这个方法只在三维空间中有效：对于四维或更高维的球面，相应的命题并不成立。）

延伸练习

1 **整个面包。**证明对于整个未切开的面包，$V/A = \frac{a}{3}$。为甚么题目中的条件比 $\frac{a}{3} < 1$ 更难满足?

2 **热带地区。**地球表面有多大比例位于南纬 23.4° 与北纬 23.4° 之间?（把地球视为一个球。由于面积与高度成正比，你只需要用到 $\sin 23.4°$。）

3 **其他形状。**证明对于抛物面（paraboloid）形状的面包（把 $y = \sqrt{x}$ 绕 x-轴旋转），每片的面包皮并非常数。对于哪些曲线 $y(x)$，$y\sqrt{1 + (y')^2}$ 是常数?（解出相应的微分方程（differential equation）。）

4 **体积。**利用体积公式，证明球的体积是包裹它的圆柱体积的三分之二，正如阿基米德所发现的那样。

延伸阅读

- **Sherman Stein, *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?***（Mathematical Association of America）。为现代读者讲解阿基米德的数学。
- **Timothy Gowers, *Mathematics: A Very Short Introduction***（Oxford University Press）。书中关于几何的一章介绍了曲面的几何。
- **John Snyder, *Flattening the Earth***（University of Chicago Press）。两千年来的地图投影史。

完整的引导式解答见第 4.8 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/spherical-loaf.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com