4.7 变分法

工作纸

题目

STEP III 2014，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s3-q4

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　为甚么 $I \geq 0$ 并非显而易见？试用 $y = 1 - x$，它满足 $y(1) = 0$。

阶段 1 配方法（completing the square）

涵盖：第 (i) 部分

想一想 展开 I_1 中的平方，然后计算 $I - I_1$。利用 $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$。

停一停，试一试 被积函数（integrand）$y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x$ 是一个恰当导数（exact derivative）。它是哪个函数的导数？然后利用 $y(1) = 0$。

阶段 2　何时 $I = 0$?

涵盖：第 (i) 部分

想一想　若一个连续（continuous）非负（non-negative）函数的积分为零，你能对这个函数作出甚么结论?

停一停，试一试　因此 $y' + y \tan x = 0$。解这个方程（两边乘以 $\sec x$），并利用 $y(1) = 0$。

阶段 3 一般情形

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 以 $\int_0^1 (y' + ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$ 重复第 (i) 部分的做法。b 必须取甚么值，余下的各项才能构成一个恰当导数?

停一停，试一试 这个论证在哪里可能失效? 考察 $\tan ax$ 在 $0 \le x \le 1$ 上的情况。

阶段 4　临界情形

涵盖：$a = \frac{\pi}{2}$ 的情形

> **想一想**　在第 (i) 部分中，使 $I = 0$ 的函数须满足 $y' + y\tan x = 0$。现在对应的方程是甚么？它有哪些解？当 $a = \frac{\pi}{2}$ 时，其中是否有一个解满足 $y(1) = 0$？

背后的数学

最速降线与一门学科的诞生

1696 年，约翰·伯努利（Johann Bernoulli）向欧洲的数学家发出挑战：求一条曲线，使珠子沿着它从一点滑到另一点所需的时间最短。这就是最速降线（brachistochrone）问题。提交解答的有牛顿（Newton）（他匿名投稿，一夜之间解出；伯努利说他“从爪子认出了狮子”）、莱布尼兹（Leibniz）、洛必达（l'Hôpital）和雅各布·伯努利（Jakob Bernoulli）。答案是一条摆线（cycloid）。到了 1750 年代，欧拉（Euler）和年轻的拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange）把这些个别的技巧变成一套通用的方法：如果 y 令 $\int F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ 取平稳值，那么 y 满足欧拉－拉格朗日方程（Euler–Lagrange equation）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

对于我们的 J，$F = (y')^2 - a^2y^2$，而欧拉－拉格朗日方程就是 $y'' + a^2y = 0$：简谐运动（simple harmonic motion）。

为何是 $\pi/2$？

当 $a < \frac{\pi}{2}$ 时，J 的最小值是 0，而且只有 $y \equiv 0$ 才能取得。当 $a = \frac{\pi}{2}$ 时，最小值仍然是 0，但多了一个函数能取得它。当 $a > \frac{\pi}{2}$ 时，同一个函数 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ 给出

$$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2} < 0,$$

而只要把 y 按比例放大，J 就可以负得要多大有多大：根本没有最小值（图 4.7.1）。临界值就是第一个令 $y'' + a^2 y = 0$ 有非零解满足边界条件的 a（边界条件是 $y(1) = 0$，以及在自由端的“自然”条件 $y'(0) = 0$）。这是一个*特征值问题*（eigenvalue problem），而 $a^2 = \frac{\pi^2}{4}$ 是它最小的特征值。试与 Section 3.7 比较：那里把函数在长度为 π 的区间的两端都固定，得出临界值 1；这里区间长度为 1，而且只固定一端，相当于长度为 2 的区间的一半，所以临界的 a 是 $\frac{\pi}{2}$。

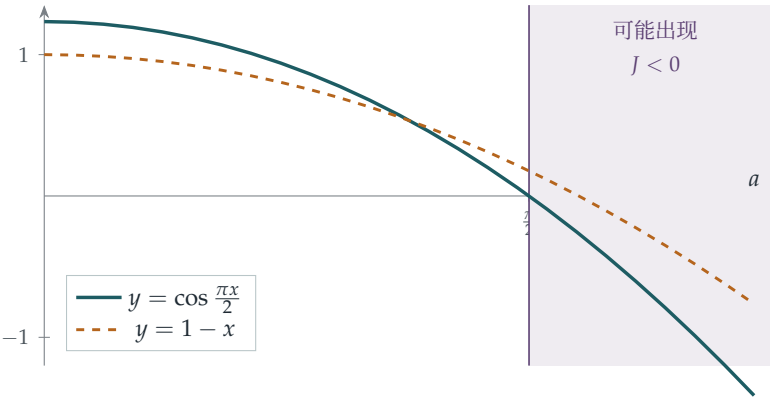

图 4.7.1 对于两个满足 $y(1) = 0$ 的试验函数，J 的值随 a 的变化。对于 $y = 1 - x$，$J = 1 - \frac{a^2}{3}$ 要到 $a > \sqrt{3}$ 才变成负数。对于 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$，$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2}$ 在 $a > \frac{\pi}{2}$ 时随即变成负数，而且没有函数能做得更好：当 $a < \frac{\pi}{2}$ 时，对每个 y 都有 $J \geq 0$。

物理学与最小作用量原理

后来发现，变分法描述的竟是大自然本身。在十八和十九世纪，人们逐渐明白运动定律可以这样表述：力学系统的运动方式，会令一个称为*作用量*（action）的积分取平稳值，这就是最小作用量原理（principle of least action）。同样，光沿着需时最短的路径前进（费马原理，Fermat's principle），这解释了折射现象。到了二十世纪，同一个想法通过费曼（Richard Feynman）的“路径求和”（sum over paths），成为量子力学的基础。本题中的二次积分是最简单的例子，而它们引出的特征值问题，会在 Section 8.6 以量子振子能级的面貌再次出现。

延伸练习

1 **越过临界值。**证明若 $a > \frac{\pi}{2}$，则 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ 给出 $J < 0$。

2 **欧拉－拉格朗日方程。**较难 设 y 在满足 $y(1) = 0$ 的函数之中令 J 取最小值。对任何满足 $\eta(1) = 0$ 的函数 η 和任何数 ε，都有 $J(y + \varepsilon\eta) \geq J(y)$。把 $J(y + \varepsilon\eta)$ 按 ε 的幂展

开，并由此推出 $\int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta)\,\mathrm{d}x = 0$。用分部积分法（integration by parts）证明 $y'' + a^2 y = 0$ 及 $y'(0) = 0$（假设 y 足够光滑）。

3 **较长的区间。**用代换法（substitution）证明：若 $y(L) = 0$，则 $\int_0^L \left((y')^2 - a^2 y^2\right)\mathrm{d}x \geq 0$ 对所有 y 成立，当且仅当 $a \leq \frac{\pi}{2L}$；并证明只有当 $a = \frac{\pi}{2L}$ 时，才有非零的 y 令等号成立。

4 **摆线。**查阅最速降线问题，并找出摆线的参数方程（parametric equations）。证明在一条倒置的摆线上，珠子无论从哪一点由静止释放，到达最低点所需的时间都相同（这是等时（tautochrone）性质，由惠更斯（Huygens）于 1659 年发现）。

延伸阅读

- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。讲述最优化的历史与数学，包括最速降线，为学生而写。
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics***，第二卷第 19 章（“The principle of least action”，最小作用量原理）。可在网上免费阅读。
- **Bruce van Brunt, *The Calculus of Variations***（Springer）。一本大学本科教科书；头几章只需要高级程度（A-level）的微积分知识。

完整的引导式解答见第 4.7 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/variations.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com