4.6 没有公式的积分

工作纸

题目

STEP III 2016，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s3-q3

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　若 $\int \mathrm{f}(x)e^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^{x} + C$，P 和 Q 必须满足甚么方程？（对右边求导。）

阶段 1 因式 $x+1$

涵盖：第 (i) 部分

想一想 对 $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x$ 求导（differentiate），并令它等于 $\mathrm{f}(x)e^x$。消去分母，得出一个多项式（polynomial）之间的恒等式（identity）。

停一停，试一试 在该恒等式中代入 $x=-1$。$\mathrm{Q}(-1)$ 必须满足甚么条件?

阶段 2　次数

涵盖：第 (i) 部分

停一停，试一试　设 P 和 Q 的次数（degree）分别为 p 和 q。在 $\mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}' + \mathrm{P}\mathrm{Q}$ 中，哪一项的次数最高？比较等式两边的次数。

阶段 3　求 P

涵盖：第 (i) 部分

想一想　当 $\mathrm{Q} = x + 1$ 时，P 是二次多项式（quadratic）。设 $\mathrm{P} = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$，代入后比较系数（coefficient）。

阶段 4 不可能的情况

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 写出 $f(x)=\frac{1}{x+1}$ 时的恒等式。仿照第 (i) 部分，证明 $Q(-1)=0$。

停一停，试一试 设 $Q=(x+1)^k R$，其中 $k\geq 1$ 且 $R(-1)\neq 0$。代入后，尽量约去 $x+1$ 的因式，再代入 $x=-1$。由此可知 $P(-1)$ 有甚么性质？

背后的数学

极点与对数

第 (ii) 部分背后有一幅简单的图像。被积函数（integrand）$\frac{e^x}{x+1}$ 在 $x=-1$ 处有一个**单极点**（simple pole）：在该点附近，它的表现像 $\frac{e^{-1}}{x+1}$。对 $\frac{1}{x+1}$ 积分得 $\ln|x+1|$，所以原函数（antiderivative）在 -1 附近的表现应该像 $e^{-1}\ln|x+1|$，以对数的速度趋向 $-\infty$（图 4.6.1）。但有理函数乘以 e^x 只能以幂 $(x+1)^{-k}$ 的方式趋向无穷，其导数因而有一个阶数为 $k+1\geq 2$ 的极点，绝不会是单极点。有理函数无法产生对数式的表现；第 4 阶段的代数运算，正是这个观察的严格版本。相反，在第 (i) 部分，被积函数有一个二阶极点，而这正是带有单极点的函数求导后的模样，所以答案才有可能是有理的。

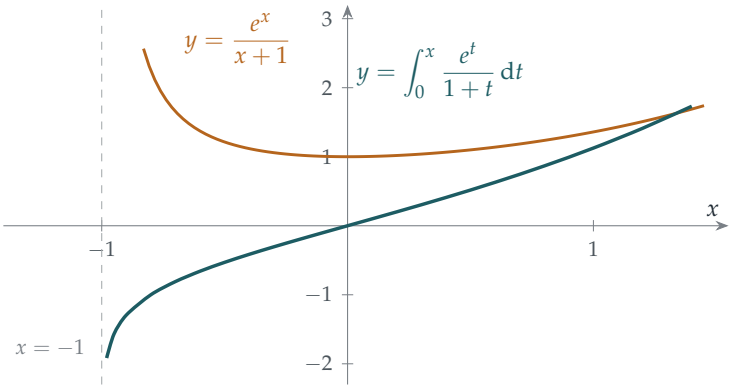

图 4.6.1　被积函数 $\frac{e^x}{x+1}$（琥珀色）在 $x = -1$ 处有一个单极点。它的原函数（蓝绿色，以数值方法计算）完全存在，但当 $x \to -1^+$ 时，它以对数的速度趋向 $-\infty$，表现像 $e^{-1}\ln(x+1)$。没有任何有理函数乘以 e^x 能有这样的表现。

刘维尔与 Risch 算法

在 1830 年代，刘维尔（Joseph Liouville）建立了一套理论，研究哪些积分可以用*初等函数*（elementary functions）表示（即由多项式、指数函数、对数函数、根式和三角函数经通常的运算构成的函数）。他的其中一个结果指出：若 f 和 g 是有理函数而 g 不是常数，则 $\int \mathrm{f}(x)e^{\mathrm{g}(x)}\,\mathrm{d}x$ 只有在等于 $\mathrm{R}(x)e^{\mathrm{g}(x)}$（另加一个常数）时才是初等的，其中 R 是某个有理函数。（对 g 的条件不可或缺：当 $\mathrm{g} = 0$ 而 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x}$ 时，积分是 $\ln|x|$，它是初等函数，却不是有理函数。）所以本题排除了有理形式，其实就证明了 $\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ 根本不是初等函数。同一定理的其他版本可证明 $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 都不是初等的。1969 年，Robert Risch 把刘维尔的想法发展成一套算法（algorithm），可就一大类函数判定初等积分是否存在，并在存在时把它求出来。电脑代数系统（computer algebra system）内部所用的，就是这套算法的不同版本。

特殊函数

当一个积分没有初等形式时，数学家会给它起个名字，把它当作新的函数来研究，正如我们在 Section 3.9 中处理朗伯 W 函数（Lambert W function）那样。这里的积分本质上就是*指数积分*（exponential integral）$\mathrm{Ei}(x)$，它出现于热传导问题，也出现于*对数积分*（logarithmic integral）$\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x)$ 之中，后者是不超过 x 的质数（prime）个数的最佳简单近似（Section 1.2）。当 $x < 0$ 时，它是 $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$。当 $x > 0$ 时，这个积分会穿过 $t = 0$ 处的无穷尖峰，所以 $\mathrm{Ei}(x)$ 的定义是先挖去尖峰周围的一个小区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$，再令 $\varepsilon \to 0$：这就是*柯西主值*（Cauchy principal value）。

延伸练习

1 **两个可行的例子。**证明 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{x+1} + C$ 及 $\int \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-1}{x+1}\,e^x + C$。

2 **高斯函数。**证明不存在多项式 P 使得 $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{P}(x)e^{-x^2} + C$。（提示：求导后比较次数。）

3 **另一个极点。**仿照第 (ii) 部分的论证，证明 $\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不能写成 $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}e^x + C$ 的形式。

4 **何时可行？**假设 f 是多项式，且对某个多项式 P 有 $\int \frac{\mathrm{f}(x)}{(x+1)^2}\,e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}(x)}{x+1}\,e^x + C$。证明 $(x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P} = \mathrm{f}$，并通过计算此式及其导数在 $x=-1$ 的值，证明 $\mathrm{f}(-1) + \mathrm{f}'(-1) = 0$。验证这个条件对 $\mathrm{f}(x) = x^3 - 2$ 以及练习 1 的例子都成立。较难你能证明这个条件也是充分的吗？

延伸阅读

- **Brian Conrad, “Impossibility theorems for elementary integration”**（初等积分的不可能性定理）。可免费取得的讲义，配合例子讲解刘维尔定理。
- **Elena Anne Marchisotto & Gholam-Ali Zakeri, “An invitation to integration in finite terms”**（有限形式积分导引），*The College Mathematics Journal* 25 (1994)。刘维尔理论的浅白入门。
- **Manuel Bronstein, *Symbolic Integration I***（Springer）。讲述电脑代数系统实际上如何求积分。程度较深。

完整的引导式解答见第 4.6 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/no-formula.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com