4.5 大二学生之梦

工作纸

题目

STEP III 2009，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s3-q8

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　函数 x^x 在 $x = 0$ 处无法用你所知的任何公式定义（0^0 的意义并不明确）。当 x 从上方趋近 0 时，它的表现如何？试用计算机计算 $x = 0.1$、0.01、0.001 的情况。

阶段 1 幂胜于对数

涵盖：第 (i) 部分

想一想 当 $x \to 0^+$ 时，$\ln x \to -\infty$。哪一个代换（substitution）可以把 $x \to 0^+$ 变成 $t \to \infty$，并把 $x^m(\ln x)^n$ 变成类似 $e^{-mt}t^n$ 的式子?

停一停，试一试 对于 x^x，写成 $x^x = e^{x \ln x}$，然后取 $m = n = 1$ 应用第一个结果。

阶段 2　归约公式

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　对 I_{n+1} 使用分部积分法（integration by parts）。应该对哪一个因子积分?

停一停，试一试　边界项（boundary term）在 $x = 1$ 处以及当 $x \to 0$ 时会怎样?（利用第 (i) 部分。）然后由 I_0 开始，反复应用归约公式（reduction formula）。

阶段 3 **级数**

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 利用 e^y 的级数（series）展开 $x^x = e^{x \ln x}$。每一项是甚么样子的?

停一停，试一试 由 0 至 1 逐项积分（integrate term by term），并取 $m = n$ 应用第 (ii) 部分。

背后的数学

交换求和与积分

第 3 阶段不动声色地把无穷和与积分交换了次序：$\int \sum = \sum \int$。这样做并非总是容许的。在大学里，你会遇到交换后不成立的例子，也会学到一些定理，说明甚么时候可以放心交换。最简单的一个定理指出，当级数一致收敛（converges uniformly）时，交换是安全的：即级数的尾部可以同时在每一个 x 处都变得很小。在这里，$|x \ln x| \le \frac{1}{e}$ 在 $(0, 1]$ 上成立，所以无论 x 是甚么，第 n 项的大小最多是 $\frac{e^{-n}}{n!}$。这些上界之和收敛，因此尾部一致地小，交换也就有了根据。这个论证称为魏尔斯特拉斯 M 判别法（Weierstrass M-test），是分析学（analysis）中最常用的工具之一。

为何这个“梦”会成真

这条恒等式很特别。它有赖 $\frac{(x\ln x)^n}{n!}$ 中的幂与积分 $\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ 完全吻合，当中的 $n!$ 恰好全部约去。追根究柢，这个积分其实是乔装了的伽玛函数（Gamma function）：代换 $x = e^{-t/(n+1)}$ 把它变成 $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\int_0^\infty t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n\,\Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}}$，与 Section 4.4 连系起来。

名字的由来

“大二学生之梦”这个名字，是 Jonathan Borwein 与合著者在 2004 年出版的 *Experimentation in Mathematics* 一书中所创，用来与“大一新生之梦”$(a+b)^n = a^n + b^n$ 配对（有趣的是，后者在某些数系中是成立的：在模质数 p 的算术中，$(a+b)^p = a^p + b^p$，因为中间所有的二项式系数（binomial coefficient）都可被 p 整除）。Borwein 是实验数学（experimental mathematics）的先驱，这门学问利用电脑去发现像本题这样的恒等式，然后再以人手证明。

延伸练习

1. **配对的等式。**证明 $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n} \approx 1.2913$。

2. **极小值。**证明 x^x 在 $(0,\infty)$ 上的极小值出现于 $x = \frac{1}{e}$，其值为 $e^{-1/e}$。

3. **需要多少项？**对于各项递减的交错级数（alternating series），截断后的误差小于第一个被略去的项。要准确至小数点后六位，需要取 $\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$ 的级数的多少项？

4. **一个近亲。**用同样的方法证明 $\displaystyle\int_0^1 x^2\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$，以及 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。（根据 Section 2.4，这等于 $-\frac{\pi^2}{6}$。）

延伸阅读

- **Jonathan Borwein, David Bailey & Roland Girgensohn, *Experimentation in Mathematics***（A. K. Peters）。这个名字的出处，书中还有许多由电脑发现的恒等式。
- **William Dunham, *The Calculus Gallery***（Princeton University Press）。由牛顿（Newton）到勒贝格（Lebesgue）的分析学杰作，包括伯努利的工作。
- **Mary Hart, *Guide to Analysis***（Palgrave）。清楚讲解一致收敛，以及何时可以交换求和与积分。

完整的引导式解答见第 4.5 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/sophomores-dream.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com