4.4 沃利斯、Beta 与二分之一的阶乘

工作纸

题目

STEP II 1995，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s2-q4

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　u_0 和 u_1 是甚么？当 n 很大时，$\sin^n t$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的图像大致是甚么样子？

阶段 1 递推公式（reduction formula）

涵盖：递推公式

想一想 把 $\sin^n t = \sin t \cdot \sin^{n-1} t$ 写出来，然后用分部积分法（integration by parts）：对 $\sin t$ 积分，对 $\sin^{n-1} t$ 求导。

停一停，试一试 新的被积函数（integrand）含有 $\cos^2 t$。把它写成 $1 - \sin^2 t$，便可回到 u_n 和 u_{n-2}。然后乘以 u_{n-1}。

阶段 2　不变量（invariant）

涵盖：$nu_nu_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$

> **停一停，试一试**　这个关系式说明，当 n 减一时，nu_nu_{n-1} 保持不变。当 $n = 1$ 时它的值是多少？计算 u_0 和 u_1。

阶段 3 **夹逼（squeeze）**

涵盖：略图、不等式与极限

想一想 对于 $0 < t < \frac{\pi}{2}$，$\sin^n t$ 与 $\sin^{n-1} t$ 相比，哪个较大？由此可知 u_n 与 u_{n-1} 有何关系？

停一停，试一试 把 $u_n < u_{n-1}$ 以两种方式代入 $nu_nu_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$，从而把 nu_n^2 夹在中间。然后以 $n+1$ 代替 n，应用其中一个不等式。

背后的数学

沃利斯乘积

把递推公式一直用到 u_0 或 u_1，便得到明确的值：

$$u_{2m} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad u_{2m+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)}.$$

由夹逼可知 $u_{2m}/u_{2m+1} \to 1$。把这个比写出来再整理，便得到沃利斯乘积

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}.$$

沃利斯在 1655 年以一种大胆的插值(interpolation)方法发现了它:他把 $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx$ 放进一个指数为整数的积分表中，从而猜出它“应该”是甚么。这是数学史上最早的无穷乘积之一，仅次于韦达（Viète）的乘积（Section 2.5），也是第一个只用有理数的无穷乘积。

二分之一的阶乘

沃利斯的插值想法，在 1729 年由欧拉（Euler）赋予了严格的意义。他找到一个函数，现称为*伽玛函数*（Gamma function），

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt,$$

它满足 $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$（用分部积分法），而且对整数 n 有 $\Gamma(n+1) = n!$。它把阶乘（factorial）平滑地延拓至所有正实数。与它密切相关的*贝塔函数*（Beta function）

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

包含了 Section 4.3 和 Section 2.9 中的积分，而且经代换 $x = \sin^2 t$ 之后，也包含我们的 u_n。特别地，$\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\,dx = \frac{\pi}{8}$（练习 2），由此得 $\Gamma(\frac{3}{2})^2/\Gamma(3) = \frac{\pi}{8}$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。等价地，$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$，这与著名的高斯积分（Gaussian integral）$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ 是同一个事实，也正是 π 出现在正态分布（normal distribution）公式中的原因。

斯特灵公式

斯特灵公式说 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$。其中 $(n/e)^n$ 的部分相对容易得到，但常数 $\sqrt{2\pi}$ 则较难，而求出它的标准方法正是本题：u_{2m} 的明确值涉及 $(2m)!/(m!)^2$，而极限 $nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$ 则把这个常数确定下来。另有一条截然不同的途径，通过概率得到同一个常数，见 Section 12.23。

延伸练习

1 **沃利斯乘积。**利用 u_{2m} 和 u_{2m+1} 的明确值，以及 $u_{2m+1} < u_{2m} < u_{2m-1}$，证明沃利斯乘积。

2 **一个贝塔积分。**试做 STEP II 2013，第 2 题（step.maths.org/questions/13-s2-q2）。这题用递推公式计算 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx$，然后问当 $n = \frac{1}{2}$ 时答案有何启示：这是对二分之一的阶乘的初次一瞥。

3 **贝塔函数。**试做 STEP III 2025，第 1 题（载于 OCR 提供下载的 2025 年试卷，www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip）。这题建立一般的贝塔积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-$

$x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$、它的对称性和一个递推关系，并用它们计算一个在 $[0,\infty)$ 上的积分。

4 **中心二项式系数（central binomial coefficients）。**较难证明 $u_{2m}=\binom{2m}{m}\dfrac{\pi}{2^{2m+1}}$，并利用 $nu_n^2\to\frac{\pi}{2}$ 推导出当 m 很大时 $\binom{2m}{m}\approx\dfrac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$。就 $m=10$ 验证这个结果。

延伸阅读

- **Julian Havil, *Gamma***（Princeton University Press）。内容包括伽玛函数及其历史。
- **Philip J. Davis, "Leonhard Euler's integral: a historical profile of the Gamma function"**, *American Mathematical Monthly* 66 (1959)。一篇获奖的经典文章，读过本节之后便能看懂。
- **Emil Artin, *The Gamma Function***（Dover）。一本简短而优美的专著，适合学过一些分析之后阅读。

完整的引导式解答见第 4.4 节：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/wallis-beta.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com